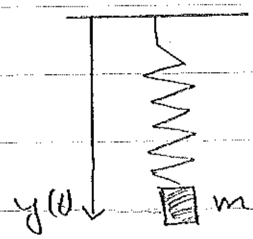
Kap X Gewöhnliche Differentialgleichungen

§ 1 Einleitung, Überblick, Großer Struktursatz

Die Mehrzahl aller Vorgänge, welche in Natur und Technik ablaufen, werden durch Gleichungen beschrieben, welche in ihrem Typ sog. Differentialgleichungen darstellen. Allgemein stellt eine Dgl eine Beziehung (≙ Gleichung) dar zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen sowie der Variablen selbst, , und die Aufgabe besteht darin, die je Funktionen zu berechnen, die einer solchen gegebenen Beziehung genüge Handelt es sich um e Funktion (y), die von einer einzigen Variablen (x abhängen, so spricht man von "Gewöhnlichen Differentialgleichungen" sonst von "Partiellen Differentialgleichungen".
Wir behandeln "gewöhnliche Differentialgleichungen", wobei wir uns

Beispiel 1 (Mechanische Federschwingung): Ist $y(t)$ die Auslenkung zur Zeit t einer Feder (Federkonstante c), an der eine Masse (m) hängt, und welche reibungsfrei schwingen kann,
so wird die Bewegung nach dem Newton-Gesetz beschrieben:



$\dot{y}(t) =$ Geschwindigkeit $= \frac{d}{dt} y(t)$

$\ddot{y}(t) =$ Beschleunigung $= \frac{d^2}{dt^2} y(t)$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Trägheitskraft:} & m\ddot{y}(t) \\ \text{Federrückstellkraft:} & c\,y(t) \\ \text{Angreifende Kraft:} & m \cdot g \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{m\ddot{y}(t) + c\,y(t) + mg = 0},$$

da die Summe aller Kräfte $= 0$ ist. Dies ist eine Dgl für $y(t)$, und die Lösung sind sin- bzw. cos-Funktionen.

Beispiel 2 (Bevölkerungswachstum). Es sei $N(t)$ die Bevölkerungszahl zur Zeit t. Ihre Änderungsrate im Zeitintervall Δt ist dann

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t}.$$

Ferner sei

$$R(t) = \frac{\Delta N(t)}{\Delta t} \cdot \frac{1}{N(t)} \quad \text{die "Wachstumsrate"},$$

(welche konstant = Geburtrate − Sterberate ist, $R(t) = C$)
Lassen wir o.E. $N(t) \in \mathbb{R}$ zu, so führt dies bei $\Delta t \to 0$ auf die Ableitungsbeziehung

$$\boxed{\dot{N}(t) = R(t) \cdot N(t)},$$

die als <u>allgemeine Wachstumsgleichung</u> bezeichnet wird. Nach dem sog. "Malthusschen Modell" ist $R(t)$ konstant, und man erhält die einfachere Dgl

$$\dot{N}(t) = cN(t), \qquad \text{(Wachstums-Diff. gleichung)}$$

deren Lösung wir schon kennen: $N(t) = Ke^{ct}$. Also: die Bevölkerung wächst exponentiell (Kriege wirken dies zu verhindern).

<u>Beispiel 3</u> (Aus der Chemie): Ist $m(t)$ die bei einem chemischen Vorgang bis zur Zeit t umgewandelte Masse eines Stoffes, so gibt es Vorgänge, bei denen die Änderungsrate dieser Umsetzung proportional zur verbleibenden Restmasse (bzw. zu einer Potenz derselben) ist. Aus dieser Modellannahme erhalten wir also

$$\frac{\Delta m(t)}{\Delta t} \cong c(M_0 - m(t)) \qquad (M_0 \equiv \text{Anfangsmasse}, m(0) = M_0)$$

$$\dot{m}(t) = c(M_0 - m(t)) \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\dot{m}(t) = c(M_0 - m(t))^n},$$

und diese Gleichung heißt "Chemische Reaktionsgleichung n-ter Ordnung".

<u>Definition:</u> Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung der Form

$$F(x, y(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

mit einer stetigen Funktion $F(x, y_1, \ldots, y_n)$ von $(n+1)$ Variablen. Ist n die höchste Ableitungsordnung für die gesuchte Funktion y, die in der Dgl vorkommt, so heißt n auch die Ordnung der Dgl. Läßt sich die Gleichung explizit nach $y^{(n)}$ umstellen,

$$y^{(n)} = G(x, y, \ldots, y^{(n-1)}),$$

so liegt eine explizite Form vor, andernfalls heißt die Dgl

Beispiele:

1) $y' = 2y^2 + x$ ist eine (explizite) Dgl 1. Ordnung für $y(x)$

2) $y'' + 2y' - y = \sin x$ ist eine (explizite) Dgl 2. Ordnung

3) $f''' = f$ ist eine (explizite) Dgl. 3. Ordnung für $f(x)$

4) $\sin(y' + 2) = (y' + \operatorname{tg} y)\,x$ ist eine implizite Dgl 1. Ordnung
(Man kann sie nicht nach y' auflösen)

<u>Definition:</u> Eine Dgl $F(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$ heißt <u>lineare Differentialgleichung</u>, wenn die Funktion F bezüglich der Variablen $y, \dots, y^{(n)}$ linear ist, d.h. wenn

$$F(x, y_1+y_2, y_1'+y_2', \dots, y_1^{(n)}+y_2^{(n)}) = F(x, y_1, \dots, y_1^{(n)}) + F(x, y_2, \dots, y_2^{(n)}) + h(x)$$

und $F(x, cy, \dots, cy^{(n)}) = c\,F(x, y, \dots, y^{(n)}) + g(c,x)$

mit Funktionen $h(x)$ und $g(c,x)$ ist. Es gilt: Eine Dgl n-ter Ordnung ist eine lineare Differentialgleichung $\Longleftrightarrow$ sie hat folgende Form

$$\boxed{a_n(x)\,y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)\,y(x) = g(x)}$$

mit stetigen Funktionen $a_0(x), \dots, a_n(x)$ und $g(x)$. Die lineare Dgl heißt <u>homogen</u> $\Longleftrightarrow$ $g(x) \equiv 0$, sonst <u>inhomogen</u>.
Die Funktionen $a_i(x)$ heißen hierbei "<u>Koeffizienten</u>".

Beispiele:

1) $y' + 2y = 4$ (linear, inhomogen, konst. Koeff., 1. Ordnung)

2) $y'' - 2y' + xy = 0$ (linear, homogen, nicht-konst. Koeff., 2. Ordnung)

3) $y'^2 + 2y = \sin x$ (nichtlineare Dgl 1. Ordnung)

Beachte, daß homogen – nicht-homogen nur für lineare Dgl'n definiert ist. Die linearen Dgl'n bilden – neben den separierbaren – die überschaubarste und aus der Anwendungssicht und ebenso aus der Sicht der Grundlagen wichtigste Klasse der Differentialgleichungen. Die Struktur der Gesamtheit aller Lösungen läßt sich mittels der Methoden der linearen Algebra und Ju th. komplett beschreiben.

Für alle linearen Differentialgleichungen können wir uns folgende Übersicht über die "Gesamtheit" der Lösungen merken:

<u>Theorem (Großer Struktursatz für lineare Dgl'n)</u>

Gegeben sei eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung in Standardform:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)\, y(x) = h(x)$$

mit stetigen Funktionen a_i, $i = 0, \dots, n-1$ und h auf $[a,b]$, wobei $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Man definiert hier – einer übersichtlicheren Darstellung wegen – den "Differentialoperator"

$$L(y) := y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y$$

(unter Weglassung des Argumentes x). Dann gilt

(1) Der Differentialoperator: $L : C^n[a,b] \to C^0[a,b]$ ist linear, das bedeutet:

(i) $L(y^1 + y^2) = L(y^1) + L(y^2)$ und ii) $L(cy) = cL(y)$ ($c \in$

[hierbei bedeutet: $C^k[a,b]$ der Raum aller k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf $[a,b]$, $0 \leq k \leq \infty$]

(Superpositionsprinzip)

(2) Folgerung: Es sei $V_h = \{y \mid L(y) = h\}$ die Menge aller Lösungen der inhomogenen Dgl. – dementsprechend sei $V_0 = \{y \mid L(y) = 0\}$ der Raum aller Lösungen der entsprechenden homogenen Dgl. Dann gilt (mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$)

$$\left.\begin{array}{l} \text{(i) } y^1 \in V_0 \text{ und } y^2 \in V_0 \Rightarrow c_1 y^1 + c_2 y^2 \in V_0 \\ \text{ii) } y^1 \in V_h \text{ und } y^2 \in V_h \Rightarrow y^1 - y^2 \in V_0 \end{array}\right\} \text{"Superpositionsprinzip für lineare Dgl'n"}$$

iii) ist $y_{sp} \in V_h$ und $y_0 \in V_0 \Rightarrow y_0 + y_{sp} \in V_h$

(3) Folgerung: Um alle Lösungen der Dgl $L(y) = h$ zu erhalten, reicht es, alle Lösungen der homogenen Dgl $L(y) = 0$ zu kennen und irgendeine beliebige (sogenannte "spezielle") Lösung y_{sp} von $L(y) = h$; dann ist nämlich

$$V_h = \{y_{sp} + y_0 \mid \text{mit } y_0 \in V_0\} = \{y_{sp}\} + V_0$$

(4) Der Raum V_0 ist n-dimensional. Das bedeutet (u.a.):

(i) Es gibt n "linear unabhängige" Lösungen $y^1, \ldots, y^n \in V_0$ die demzufolge die Eigenschaft haben:

(α): Aus $\alpha_1 y^1(x) + \ldots + \alpha_n y^n(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$ folgt $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$

(β) Ist $y \in V_0$ irgendeine beliebige Lösung der homogenen Gleichung $L(y) = 0$, so gibt es eindeutige Koeffizienten, Konstanten, $c_i \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = c_1 y^1(x) + \ldots + c_n y^n(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

(γ) Man erhält diese y^i beispielsweise als eindeutige Lösung des Systems (Dgl mit "Anfangsbedingung")

$L(y^i) = 0$ und $\frac{d^j}{dx^j} y^i(a) = \{0$ …

ii) Ist $b_0, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ vorgegeben, so ist die Dgl mit Anfangsbedingung

$$L(y) = 0 \quad , \quad y^{(j)} = b_j \quad (j = 0, \dots, n-1)$$

eindeutig lösbar.

(5) Man nennt ein System $\{y^1, \dots, y^n\} \in V_0$ ein Fundamentalsystem der Dgl, wenn die $\{y^i\}$ linear unabhängig sind – dh. wenn die Bedingung (4, α) gilt. <u>Die allgemeine Lösung $y \in V_h$</u> ist dann wie folgt gegeben:

$$L(y) = h \Leftrightarrow y(x) = y_{sp} + \sum_{i=1}^{n} c_i y^i(x)$$

wobei $c^i \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten sind. Eine weitere Folgerung is

<u>Folgerung</u> (Eindeutigkeit der Anfangswertaufgabe)
Die Differentialgleichung

$$L(y) = h$$

hat unter der zusätzlichen Bedingung (der sog. Anfangswertbed.)

$$y^{(j)}(a) = b_j \quad , j = 0, \dots, n-1$$

zu vorgegebenen $b_j \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung.

Beweis: Die Aussagen (1) bis (3) sind trivialer Natur, sie beruhen letztlich auf der Linearität des Ableitens, also

$$a(x) \frac{d^k}{dx^k} \left(y^1(x) + y^2(x) \right) = a(x) \frac{d^k}{dx^k} y^1(x) + a(x) \frac{d^k}{dx^k} y^2(x)$$

für $0 \leq k < \infty$ (sofern die Ableitung existiert). Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz (4) und (5) wird (für $n > 1$) mit Mitteln der linearen Algebra bewiesen (solche Gleichungen können nämlich auf Systeme von Dgl'n 1. Ordnungen überführt werden, die durch Matrizen beschrieben werden); für $n=1$ ist die Aussage (4) und (5) eine Konsequenz des Konstantenprinzips (vgl. §1 und §2)

<u>Bemerkung:</u> Man kann auch für nicht-lineare Differentialgleichungen Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen formulieren und beweisen. Das Ergebnis ist i.w. eine Verallgemeinerung des "Großen Struktursatzes" für den linearen Fall:

- Die Lösungsmenge $\{y:[a,b]\to\mathbb{R} \mid F(x,y^{(n)},\dots,y)=0\}$ einer Dgl n-ter Ordnung ist (i.a.) eine n-dimensionale krumme Fläche ("Mannigfaltigkeit") im Raum $C^n[a,b]$ aller n-mal differenzierbaren Funktion auf $[a,b]$.
- Das Anfangswertproblem

$$F(x,y^{(n)},\dots,y)=0$$
$$y(a)=b_0,\ \dots,\ y^{(n-1)}(a)=b_{n-1}$$

ist (in den meisten Fällen) lokal eindeutig lösbar.

Wenn eine Differentialgleichung nicht mehr linear ist, gilt auch nicht mehr das Superpositionsprinzip – evidenterweise. (hiergegen wird leider oft verstoßen).

Wir gehen später auf relevante Klassen von Dgl'n explizit ein. Wenngleich die wichtige Klasse der linearen Dgl'n vollständige und geschlossene Lösungsverfahren besitzt, so können wir uns nur auf den Fall konstanter Koeffizienten beschränken. Eines der Hauptverfahren für den allgemeinen Fall stellt die sog. <u>Laplace-Transformation</u> dar, eine Integraltransformation, welche lineare Dgl'n in Polynom-Gleichungen überführt. Unsere spätere $e^{\lambda t}$-Methode ist allerdings ein gewisser Spezialfall

Zuvor wollen wir jedoch bemerken, daß die Diskussion sich nicht ausschließlich darin erschöpft, rechentechnische Lösungsverfahren zu entwickeln. In manchen Fällen können solche Algorithmen überhaupt nicht angewendet werden. Oft reicht es aber aus, daß über die Lösungen einer Dgl nur gewisse Eigenschaften gewonnen werden müssen – wie z.B. die Fragen

- Hat die Lösung Nullstellen?
- Ist sie vielleicht monoton, konvex, analytisch u.s.w.?
- Welches asymptotische Verhalten weist die Lösung auf?

Mit den Fundamentalsätzen der Differentialrechnung können solche und ähnliche Fragen sehr oft beantwortet werden. Hierzu ein Beispiel:

<u>Beispiel</u>: Sei $a(x)$ analytisch in $\mathbb{R}$ und $a(x) > 0$. Wir betrach

$(*) \qquad y'(x) = a(x)\, y^2(x)$ $\Big|$ $\underset{a=a(x)}{y' = a\, e^{\mp y^2}}$ (nicht lösb trotzdem untersu

Obwohl die Lösung dieser Dgl – wie wir in §2 zeigen werden – nicht explizit bestimmt werden kann, sind doch so manche Aussagen Konsequenzen aus den allgemeinen Zusammenhängen Ableitung – Funktion:

Aussage (1): y Lösung von $(*)$ $\Longrightarrow$ y monoton steigend

Beweis: Aus der Gleichung folgt: $y'(x) \geq 0$ für alle x

Aussage (2): y Lösung von $(*)$ $\Longrightarrow$ dort wo $y(x)$ stetig ist, ist $y(x)$ auch beliebig oft differenzierbar (sogar analytisch).

Denn aus der Gleichung folgt, daß y – dort wo y stetig ist – auch differenzierbar ist. Nun ist

$$y''(x) = a'(x)y^2(x) + 2a(x)y(x)y'(x)$$ –

wieder eine stetige Funktion. Das heißt aber auch gleichzeitig, daß die rechte Seite wieder differenzierbar ist – also $y'''(x)$ existiert usw.

Aussage (3): Für $a(x) = a = \text{const} > 0$ gilt offenbar für Lösungen $y(x)$ von $(*)$:

$$y > 0 \iff y \text{ konvex}$$
$$y < 0 \iff y \text{ konkav}.$$

Dies erkennen wir aus der obigen y''-Gleichung (mit $a' = 0$): da nämlich y' stets positiv ist, ist das Vorzeichen von y'' gleich demjenigen von y.

Aussage (4): Ebenfalls für konstantes $a > 0$ gilt: $y(x) \to 0$ bei $x \to \infty$ für Lösungen y von $(*)$

Da nämlich $y' \geq 0$ und damit y monoton wächst, gilt, daß $y(x)$ bei $x \to +\infty$ einem Grenzwert $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ zustrebt. Nun kann $b \notin \mathbb{R}$ sein – außer $b = 0$. Denn wäre $\lim y(x) = b \neq 0$, so wäre $\lim y' =$ nach dem MWS: Es ist nämlich

$$\underbrace{y(2x) - y(x)}_{\to b - b = 0} = x\,y'(z) \text{ mit einem } z = z(x),\ z \in]x, 2x[$$

woraus $\lim\limits_{z \to \infty} y'(z) = 0$ folgt, da mit x auch $z(x) \to \infty$ strebt

Für den Fall $b = \infty$ betrachtet man $h(x) = 1/y(x)$ und findet

$$h'(x) = \frac{-1}{y^2(x)} \cdot y'(x) = -a = \text{const.}$$

und hieraus $h(x) = -ax + c$. Wäre $y(x) \to \infty$, so auch $h(x) \to 0$ im Gegensatz zu $h \to -\infty$ bei $x \to -\infty$.

Natürlich haben wir mit der expliziten Darstellung von $h(x)$ auch diejenige von $y(x)$ gefunden: $y \not\equiv 0 \Rightarrow y(x) = (-ax + b)^{-1}$

→ auch ohne "Lösung" klar:

$$h' = \underbrace{\text{const}}_{\neq 0} \Rightarrow h \underset{x \to \infty}{\not\to} 0$$

§ 2 Die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

Gegeben sind auf einem Intervall $-\infty \leq a < b \leq \infty$ folgende Funktionen

$$g : [a,b] \to \mathbb{R} \;, \quad h : [a,b] \to \mathbb{R} \;,$$

beide stetig. Gesucht sind dann die Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ die die Gleichung erfüllen $L(f) = h$, also

$$\boxed{f'(x) + g(x) f(x) = h(x)}$$

für alle $x \in]a,b[$. Diese Differentialgleichung ist sowohl von ihrem Typ her als auch aus Anwendungsgründen die bedeutendste und letztlich weitreichendste.

Weil es sich um eine lineare Dgl handelt, können wir (vgl. den Großen Struktursatz) die Gesamtheit aller Lösungen dadurch bestimmen, daß wir $V_0 = \{ f \mid L(f) = 0 \}$ bestimmen (welcher nach diesem Satz 1-dimensional (dh. Vielfache einer einzigen Funktion) ist), und sodann uns eine spezielle Lösung f_{sp} verschaffen. Hierbei stellen wir die

– Methode der "Variation der Konstanten"

vor, die eigentlich nichts anderes bedeutet, als daß man zur Lösung gewisse "Ansätze" macht, welche die Berechnung der Lösung auf Integrationsaufgaben überführen.

<u>Theorem</u> (Lösungen der linearen Dgl 1. Ordnung)

(i) (homogene Gleichung): Es gilt

$$y' + g(x)\,y = 0 \iff y(x) = K e^{-\int^{x} g(s)\,ds} \quad \text{mit } K \in \mathbb{R}$$

(ii) (inhomogene Gleichung): Es gilt

$y' + g(x)\,y = h(x) \iff$ mit fixiertem $x_0 \in [a,b]$ ist

$$\boxed{y(x) = \left\{ K + \int_{x_0}^{x} \left(h(t)\, e^{\int_{x_0}^{t} g(s)\,ds} \right) dt \right\} e^{-\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds}} \quad \text{mit } K \in \mathbb{R}$$

<u>Bemerkung</u> (1) Die Wahl verschiedener unteren Integrationsgrenzen x_0 macht sich nur dadurch bemerkbar, daß sich nur die Konstante K ändert. Das heißt folgendes:
Es sei $y = y(K, x_0)(x)$ gemäß vorstehender Formel bestimmt. Ist dann $\tilde{x}_0 \in [a,b]$ eine andere untere Integrationsgrenze, so gibt es ein $\tilde{K}$ mit

$$y(\tilde{K}, \tilde{x}_0)(x) = y(K, x_0)(x) \qquad \text{für alle } x \in [a,b].$$

(2) Beachte die Bedeutung und Unterscheidung der auftretenden Integrationsgrenzen.

(3) Das <u>Anfangswertproblem</u>: Wir suchen Lösungen der Differentialgleichung, welche noch die zusätzliche Bedingung erfüllen, daß der Funktionswert y an einer fixierten Stelle x_0 vorgegeben ist, $y(x_0) = y_0$. Diese Bedingung stellt sich zumeist in der Praxis. Aus der Formel erhalten wir: Setzen wir als untere Integrationsgrenze genau dieses x_0 ein, so ist offenbar $\boxed{y(x_0) = K}$, so daß also

das Anfangswertproblem

$$L(y) = h, \quad y(x_0) = y_0$$

stets und eindeutig lösbar ist. (Setze in der Formel $K = y_0$ bei unterer Integrationsgrenze x_0).

Beweis: (i) Die Berechnung der Lösungen der homogenen Gleichung kann zum einen salopp durch die
– "Methode der Trennung der Variablen"

bewerkstelligt werden. Dort wo $y(x) \neq 0$ ist schreiben wir

$$y' + g(x)\,y = 0 \iff \frac{y'(x)}{y(x)} = -g(x) \quad \text{("Variablentrennung")}$$

$$\iff \frac{d}{dx} \ln |y(x)| = \frac{d}{dx}\left(-\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds\right)$$

$$\iff \ln|y(x)| = -\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds + C$$

$$\iff \quad y(x) = K \exp\left(-\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds\right), \text{ wie angegeben.}$$

Da a priori nicht klar ist, ob Nullstellen auftreten oder nicht, ist vorstehende Herleitung noch etwas problematisch. Die folgende Beweisführung umgeht diese Schwierigkeit:

"$\Leftarrow$" Nachrechnen

"$\Rightarrow$" Es sei $f \in V_0$ also eine Lösung der homogenen Dgl. Wir betrachten die neue Funktion

$$u(x) = f(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds}$$

und rechnen nach, daß $u' = 0$ ist, denn

$$u'(x) = f'(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} g(s)ds} + f(x)\cdot e^{\int_{x_0}^{x} g(s)ds} \cdot g(x)$$

$$= e^{\int_{x_0}^{x} g(s)ds} \{ f'(x) + g(x) f(x) \} = 0$$

genau dann wenn $f' + gf = 0$ ist. Nach dem Konstantenprinzip ist nun $u(x) = $ Konst, und dies bedeutet

$$f(x) = K e^{-\int_{x_0}^{x} g(s)ds}.$$

ii) Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu bekommen macht man für die Lösung folgenden "Ansatz":

$$f(x) = K(x)\, e^{-\int_{x_0}^{x} g(s)\, ds} \;; \qquad (\text{"Variation der Konstanten"})$$

also $K(x) = f(x)\cdot e^{\int_{x_0}^{x} g(s)ds}$. Da die exp-Funktion stets nullstellenfrei ist, ist die Forderung, daß f diese "Produktstruktur" hat, ohne einschränkende Konsequenz. Da der Ausdruck formal so aussieht als würde man die Konstante, welche in der Lösung der homogenen Gleichung als freier Parameter auftritt, nun nicht mehr als konstant vielmehr als von x abhängig behandeln, ist die Bezeichnung "Variation der Konstanten" verständlich.
Wir fragen nun: Welche Gleichung erfüllt K falls f die Dgl löst? Hierzu berechnen wir K' und finden (wie eben für $u(x)$):

$$K'(x) = f'(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} g(s)ds} + f(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} g(s)ds} \cdot \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} g(s)ds$$

$$= e^{\int_{x_0}^{x} g(s)ds} \{ f'(x) + g(x) f(x) \}$$

Also ergibt sich die Äquivalenz:

$$f' + gf = h \iff K'(x) = h(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds} .$$

Nun ergibt sich aus

$$K(x) = \int_{x_0}^{x} K'(t)\,dt + C \quad , \; C \in \mathbb{R}$$

die angegebene Formel.

<u>Bemerkung</u> (zur Lösungsstrategie)
Zur Lösung der vorliegenden Dgl

$$f' + gf = h$$

kann man folgende Stragien wählen:

<u>Methode 1</u>: Berechne f nach vorstehender "Formel"

<u>Methode 2</u>: Berechne die Lösungen der homogenen Gleichung (was formal einfacher ist) und ermittle irgendeine Lösung der inhomogenen Gleichung – und zwar

(a) durch Raten (was manchmal tatsächlich sinnvoll ist)

(b) durch die Variation der Konstanten

(c) durch geeignete Ansätze: das heißt, die Funktion f wird i.w. in der Form des Funktionstyps der rechten Seite h mit unbekannten Parametern angesetzt. Aus der erzwungenen Eigenschaft, Lösung der Dgl zu sein, können dann i.d.R. diese Parameter ausgerechnet werden.

(d) Durch Potenzreihen-Ansatz (Auf diese Methode werden wir an späterer Stelle eingehen.

Beispiele:

(1) $y' + ay = b$

$y' + ay = 0$ hat die Lösungen $y = Ke^{-ax}$ mit $K \in \mathbb{R}$.
Eine spezielle Lösung erhalten wir, indem wir für y einen geeigneten Ansatz versuchen. Die Inhomogenität ist ein Polynom 0-ten Grades – eine Konstante also. Wir setzen

$$y_{sp}(x) = c$$

$$\Rightarrow y'_{sp} + a\,y_{sp} = 0 + ac = b \iff c = b/a$$

$$\Rightarrow y(x) = Ke^{-ax} + b/a$$ ist die allgemeine Lösung der Dgl.

(2) $y'(x) + 2x\,y(x) = xe^{-x^2}$. Wir lösen nach Formel – unter Beachtung daß man bei den Integralen die untere Integrationsgrenzen bei der Auswertung weglassen darf, da sich ihr Beitrag allenfalls in die Konstante der Formel eingeht.

$$y(x) = \left\{ C + \int^x t e^{-t^2} e^{\int^t 2s\,ds} dt \right\} e^{-\int^x 2s\,ds}$$

$$= \left\{ C + \int^x t e^{-t^2} e^{t^2} dt \right\} e^{-x^2} = \left\{ C + \int^x t\,dt \right\} e^{-x^2}$$

$$= \left\{ C + \tfrac{1}{2}x^2 \right\} e^{-x^2} = Ce^{-x^2} + \tfrac{1}{2}x^2 e^{-x^2} \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}$$

(3) $y'(x) + y(x) = \cos x$. Hier wählen wir wieder die Ansatz-Methode:

Zunächst ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y' + y = 0$ durch $y(x) = Ke^{-x}$ gegeben, (sowohl nach (i) des Theorems als auch direkt: $y' = -y \iff y'/y = -1 \iff \frac{d}{dx} \ln|y(x)| = \frac{d}{dx}(-x)$

$\iff \ln|y(x)| = -x + c \iff |y(x)| = e^{-x+c} = e^{c} \cdot e^{-x}$

also $y(x) = Ke^{-x}$ mit $K \in \mathbb{R}$.

(4) $y'(x) + y(x) = \cos x$. Zunächst demonstrieren wir die Formel:

$$y(x) = \left\{ C + \int^{x} \cos t \, e^{\int^{t} 1\,ds} \, dt \right\} e^{-\int^{x} 1\,ds} = \left\{ C + \int^{x} \cos t \, e^{t} \, dt \right\} e^{-x}$$

In einer Nebenrechnung lösen wir das Integral $\int^{x} \cos t \, e^{t} \, dt$ mittels partieller Integration

Sodann setzen wir $y(x)$ als trigonometrische Funktion an:

$$y(x) = a\cos x + b\sin x \implies y'(x) + y(x) = -a\sin x + b\cos x + a\cos x + b\sin x$$

$$= \sin x\,(b-a) + \cos x\,(b+a) \overset{!}{=} \cos x$$

$\iff b - a = 0$ und $(b+a) = 1 \iff a = b = 1/2$, also

$y(x) = Ke^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$ ist die allgemeine Lösung der Dgl.

(4) $y'(x) + x^2 y(x) = x^2$. Wir demonstrieren wieder die Formel:

$$y(x) = \left\{ C + \int^{x} t^2 e^{\int^{t} s^2 ds} \, ds \right\} e^{-\int^{x} s^2 ds} = \left\{ C + \int t^2 e^{\frac{1}{3}t^3} dt \right\} e^{-\frac{1}{3}x^3}$$

Das Integral $\int^{x} t^2 e^{\frac{1}{3}t^3} dt$ ist von direkter Kettenstruktur, also

$\int^{x} t^2 e^{\frac{1}{3}t^3} dt = e^{\frac{1}{3}x^3}$, sodaß schließlich

$y(x) = Ce^{-\frac{1}{3}x^3} + 1$ mit $C \in \mathbb{R}$ die Allgemeine Lösung ist.

$y' = -x^2(1+y)$ separiert

§ 3. Separierte Differentialgleichungen

Differentialgleichungen der Form

$$y'(x) = u(x) \cdot v(y)$$

mit stetigen Funktionen u und v nennt man separierte Dgl'n, weil der formale Ausdruck

$$\frac{y'}{v(y)} = u(x)$$

die Variablen y und x jeweils auf getrennten Seiten der Gleichung enthält. Trotzdem ist es so, daß y vermöge der Dgl und nach Definition letztlich eine Funktion von x ist.

Def. $y \equiv$ const. heißt singuläre Lös$_y$ $\Leftrightarrow$ $v(y) = 0$

Bsp.: $y' = x^2 y^3$, $\quad y' = \cos x \cdot e^y$, $\quad y' = (1+x^2)\,\mathrm{tg}(y+1)$.

Theorem (Lösung der separierten Dgl).

Man löst die Dgl $y' = u(x)v(y)$ so: Sei y nicht singulär,

$$\frac{y'(x)}{v(y(x))} = u(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\int^{y(x)} \frac{1}{v(y)}\,dy = \frac{d}{dx}\int^{x} u(x)\,dx$$

Ist nun $G(y)$ eine Stammfunktion von $1/v(y)$ und $H(x)$ eine Stammfunktion von $u(x)$, so folgt

$$\frac{d}{dx}G(y(x)) = \frac{y'(x)}{v(y)} = u(x), \text{ also } \boxed{G(y) = H(x) + c} \quad c \in \mathbb{R}.$$

ist die allgemeine Lösung der Dgl. Sie liegt zunächst in "impliziter Form vor. Die explizite Form erhält man – falls möglich – indem

Bemerkung (1) Für den vorstehenden Sachverhalt schreibt man oft salopp

$$\frac{dy}{v(y)} = u(x)\,dx \iff \int^y \frac{dy}{v(y)} = \int^x u(x)\,dx + C$$

– mathematisch etwas fragwürdig (da x und y abhängig sind). Die so errechnete Lösung ist allerdings korrekt, da die Differentiation nach x automatisch den Term $y'(x)$ produziert).

(2) Das Teilen durch $v(y)$ ist nur möglich, wenn $v(y) \neq 0$ ist. Gegebenfalls muß eine eigene Untersuchung durchgeführt werden.

Beispiele: (1) $y' = x^2 y^2 \iff y'/y^2 = x^2 \iff -\frac{1}{y} = \frac{1}{3}x^3 + C$,
und $y \equiv 0$!

Dies ist die implizite Form der Lösung, welche leicht aufgelöst werden kann:

$$y(x) = \frac{1}{K - \frac{1}{3}x^3} \quad \text{mit } K \in \mathbb{R}$$

ist die allgemeine Lösung der Dgl. Allerdings ist auch $y \equiv 0$ eine Lösung, die man durch dieses Verfahren nicht erhält.

(2) Die chemische Reaktionsgleichung n-ter Ordnung

$$y'(x) = k(a-y)^n \qquad (\text{mit } k, a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$$

ist offenbar eine separierte Dgl. Auch hier ist $y \equiv a = \text{const}$ eine Lösung. Ansonsten finden wir mit obigem Verfahren

$$\frac{y'}{(a-y)^n} = k \iff \frac{1}{1-n}(a-y)^{1-n} = kx + C \qquad (C \in \mathbb{R})$$

$$\iff y(x) = a - \sqrt[1-n]{(1-n)kx + C} \,. \qquad y \equiv a$$

(3) $y' = \cos x \cdot \operatorname{tg} y \iff \frac{y'}{\operatorname{tg} y} = \cos x \iff -\ln|\cos y| = \sin x + C$

§ 4 Separierbare Differentialgleichungen

Wir nennen eine Dgl separierbar, wenn sie (durch gewisse Manipulationen) auf eine separierte Gleichung übergeführt werden kann.

Eine Systematik hierüber kann leider nicht vollständig durchgeführt werden; es gibt immer wieder überraschende Umformungen (jedweder Art), die eine vorliegende Dgl in eine separierte Form transportieren. Einige Grundtypen lassen sich dennoch klassifizieren.

Hauptmethoden hierbei sind:

a) Algebraische Manipulationen
Beispiel: $y' + x^2 y = x^2$ (eine inhomogene lineare Dgl. 1. Ordn. die wir also ohnehin lösen können)

$$\Longleftrightarrow y' = x^2 - x^2 y = x^2(1-y) \quad \text{(separiert)}$$

b) Substitution der Abhängigen Variable (y)
Beispiel: $y' = 1 + y^2/x^2$.

Setze $u(x) := y(x)/x \Rightarrow u'(x) = \dfrac{y'(x)x - y(x)}{x^2} = \dfrac{(1+u^2)x - xu}{x^2}$

$$\Longleftrightarrow u' = \frac{1+u^2-u}{x} \quad \text{(separiert!)}$$

c) Substitution der Variablen x, $\longrightarrow$ d): Einführung neuer Variablen $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$

Typ A: Gleichungen der Form $y' = f(y/x)$ bzw. $y' = f\left(\frac{x}{y}\right)$ (mit einer stetigen Funktion f). (Ähnlichkeits-Subst.)

Solche Gleichungen heißen auch "<u>homogene Differentialgleichungen</u>" (nicht zu verwechseln mit den homogenen linearen!). Lösung:
Setze $u(x) = y/x$, dann ist $u'(x) = \dfrac{y'x - y}{x^2} = \dfrac{f(u)\cdot x - xu}{x^2}$

Beispiele: (1) $\quad y' = \frac{y^2}{x^2} - 2 = f\left(\frac{y}{x}\right)$ mit $f(u) = u^2 - 2$

Mit $u = y/x$ erhalten wir hieraus die separierte Dgl

$$u' = \frac{u^2 - u - 2}{x} \iff \frac{u'}{u^2 - u - 2} = \frac{1}{x}$$

Das u-Integral berechnen wir mit der PBZ; die Nennernullstellen sind:

$$u^2 - u = 2 \iff u_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = 2 \text{ und } -1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u^2 - u - 2} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u-2} \iff 1 = A(u-2) + B(u+1)$$

$\iff A = -B = -1/3$, und hieraus folgt

$$\int \frac{du}{u^2 - u - 2} = -\frac{1}{3}\ln|u+1| + \frac{1}{3}\ln|u-2| = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{u-2}{u+1}\right| = \ln x + c$$

$$\iff \ln\left|\frac{u-2}{u+1}\right| = 3\ln x + C = \ln x^3 + C$$

$$\iff \frac{u-2}{u+1} = Kx^3 \quad \text{mit} \quad K \in \mathbb{R}.$$

Wir lösen die Gleichung nach u auf:

$$u - 2 = Kx^3(u+1) \iff u(1 - Kx^3) = 2 + Kx^3$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{2 + Kx^3}{1 - Kx^3}x = -x + \frac{3x}{1 - Kx^3}$$

(2) $\quad y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = f(u)$ mit $u = y/x$ und $f(u) = \frac{1}{u} + u$

$$\Rightarrow u' = \frac{\frac{1}{u} + u - u}{x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{u} \iff uu' = \frac{1}{x}$$

$$\iff \frac{1}{2}u^2 = \ln x + c \iff u^2 = \ln x^2 + C \Rightarrow y(x) = x\sqrt{C + \ln x^2}$$

oder mit $C = \ln K$: $\quad y(x) = x\sqrt{\ln Kx^2} \qquad (K > 0)$

(3): $xy' = y \ln y/x$, also $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x} = f(u)$ mit $u = y/x$

$\Rightarrow u' = \frac{u \ln u - u}{x} \Rightarrow \frac{u'}{u(\ln u - 1)} = \frac{1}{x}$

Das u-Integral ist von verhüllter Struktur (da $\frac{1}{u} = \ln'(u)$) $\Rightarrow$

$\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \ln|\ln u - 1| = \ln x + c$

$\Leftrightarrow \ln u - 1 = Kx$ mit $K \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \ln u = 1 + Kx \Rightarrow y(x) = xe^{1+Kx} = xe^{Kx} \cdot e$

<u>Bemerkung:</u> Liegt eine Dgl in der Form vor

$g(x,y) + h(x,y)\, y' = 0$

mit Funktionen g und h, welche homogen vom Grad $k > 0$ sind,

d.h. $g(tx, ty) = t^k g(x,y)$ und $h(tx,ty) = t^k h(x,y)$,

so liegt auch eine "homogene" Dgl $y' = f(y/x)$ vor:

$$y' = -\frac{g(x,y)}{h(x,y)} = -\frac{g(x \cdot 1, x\frac{y}{x})}{h(x \cdot 1, x \cdot y/x)} = -\frac{x^k g(1, y/x)}{x^k h(1, y/x)} = -\frac{g(1, y/x)}{h(1, y/x)}$$

Man sieht, daß die rechte Seite nur noch vom Quotienden y/x abhängt.
Dies führt auf folgende <u>Verallgemeinerung</u>:

Typ $\bar{A}$: Die Dgl $y' = f\left(\frac{g(x,y)}{h(x,y)}\right)$ mit homogenen Funktionen g
und h von gleichem Grade - bzw gleichwertig:

die Dgl $y' = f(k(x,y))$ mit einer Funktion $k(x,y)$, welche
homogen vom Grad 0 ist, - läßt sich als homogene Gleichung

Es ist nämlich

$$f\left(\frac{g(x,y)}{h(x,y)}\right) = f\left(\frac{g(x\cdot 1,\, y/x\cdot x)}{h(x\cdot 1,\, y/x\cdot x)}\right) = f\left(\frac{x^k g(1, y/x)}{x^k h(1, y/x)}\right) = f\left(\frac{g(1, y/x)}{h(1, y/x)}\right)$$

$$=: F(y/x)$$

denn der zuletzt geschriebene Ausdruck $g(1, y/x)/h(1, y/x)$ hängt nur von y/x ab. Ein wichtiger ~~Beispiel~~ Spezialfall ist

(4) $y' = f\left(\frac{ax+by}{cx+dy}\right)$ (mit $|c|+|d| \neq 0$, sonst nicht definiert)

Dann ist $y' = f\left(\frac{a+b\frac{y}{x}}{c+d\,y/x}\right) = f\left(\frac{a+bu}{c+du}\right) =: F(u)$

also $u' = \frac{y'\cdot x - y}{x^2} = \frac{F(u)-u}{x}$, eine separierte Dgl.

Beispiel: $y' = \frac{x+y}{x-y} = \frac{1+u}{1-u} =: F(u)$

$$\Rightarrow u' = \frac{F(u)-u}{x} = \left\{\frac{1+u}{1-u} - u\right\}\frac{1}{x} = \frac{1+u^2}{1-u}\cdot\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1-u}{u^2+1}\,du = \ln x + C$$

$$\Rightarrow \arctan u - \tfrac{1}{2}\ln|u^2+1| = \ln x + C$$

$$\Rightarrow \arctan y/x - \tfrac{1}{2}\ln(1+y^2/x^2) = \ln x + C$$

$$\Leftrightarrow \arctan y/x = C + \ln x + \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right) = C + \ln x + \ln\sqrt{x^2+y^2} - \ln$$

$$\arctan y/x = \ln\sqrt{x^2+y^2} + C = \ln K\sqrt{x^2+y^2} \quad (\text{mit } K = \ln C)$$

und diese Gleichung ist die implizite Lösung der Dgl, welche sich nicht mehr explizit nach y auflösen läßt.

Typ B: $y' = f(ax + by + c)$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$

Hier verwendet man die Substitution $u(x) = ax + by(y) + c$ und erhält

$$u'(x) = a + by'(x) = a + bf(u) \quad \text{— eine separierte Dgl.}$$

(5) $y' = (2x + 3y - 1)^2$ geht nach vorstehender Rechnung über in

$$u' = 2 + 3u^2 \iff \frac{u'}{2+3u^2} = 1$$

$$\iff \frac{1}{2}\int \frac{du}{1 + \left(u \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\, u\right) = x + C$$

$$\iff \sqrt{\frac{3}{2}}\, u = \tan(x\sqrt{6} + C) \iff u = \sqrt{\frac{2}{3}} \tan(x\sqrt{6} + C)$$

$$\iff y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \tan(x\sqrt{6} + C) - \frac{2}{3}x \quad \text{, die explizite Lösung}$$

Typ C: $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$ siehe $\Rightarrow$ 25a

Für $c = \gamma = 0$ ist diese Gleichung homogen. Für $\alpha = \beta = 0$ und $\gamma = 1$ ist sie identisch wie Typ B. Im anderen Fall gibt es zwei Situationen

Fall 1 $\det\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = a\beta - b\alpha \neq 0$. Dies bedeutet anschaulich, daß die beiden Geraden G_1 und G_2, die durch

$$ax + by + c = 0 \quad \text{und} \quad \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

definiert sind, nicht parallel sind (denn $\frac{a}{b} \neq \frac{\alpha}{\beta}$), dann schneiden sich G_1 und G_2 genau in einem Punkt (x_0, y_0). Definieren wir neue Variablen (Translationen): $\tilde{x} = x - x_0$, $\tilde{y} = y - y_0$, so ist

$d\tilde{y} = dy$

Alternative l.a-Version:

Sei $f(x,y) = \dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}$

Dann ist hierdurch die lin. Abb. $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert,

$$\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y))$$

1. Fall: φ ist bijektiv (

$\iff \exists^{\circ} (x_0, y_0)$ mit $\varphi(x_0, y_0) = (c_1, c_2)$

Bemerkung: diese Bedingung ist ja bekanntlich äquivalent daß die Geraden $G_i = \{(x,y) \mid \varphi_i(x,y) + c_i = 0\}$ sich (in (x_0, y_0)) schneiden bzw., daß $\det \varphi = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ ist

Folgerung: mit $(x,y) =: (\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0)$ gilt

$$f(x,y) = \Big[\varphi_1(\bar{x},\bar{y}) + \underbrace{\varphi_1(x_0,y_0) + c_1}_{0}\Big] \Big/ \varphi_2(\bar{x},\bar{y}) + \underbrace{\dots}_{0}$$

$$= \varphi_1(\bar{x},\bar{y}) / \varphi_2(\bar{x},\bar{y})$$

also: $\dfrac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \dfrac{a_1 \bar{x} + b_1 \bar{y}}{a_2 \bar{x} + b_2 \bar{y}}$

$= u(x,y) = ax + by + \dots$

2 Fall: φ nicht bij.

$\underset{\text{o.E}}{\Longrightarrow} \varphi_1 = \alpha \varphi_2 \Longrightarrow \dfrac{\varphi_1 + c_1}{\varphi_2 + c_2} = \dfrac{\alpha \varphi_2 + c_1}{\varphi_2 + c_2}$

$= (\alpha(\varphi_2 + c_2) + c_1 - \alpha c_2 \quad \dots \quad \alpha + \dfrac{\beta}{\dots}$

andererseits ist dann

$$\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma} = \frac{a\tilde{x}+b\tilde{y}}{\alpha\tilde{x}+\beta\tilde{y}},$$

denn $ax+by+c = a\tilde{x}+b\tilde{y}+c+ax_0+by_0 = a\tilde{x}+b\tilde{y}$,
weil $(x_0, y_0) \in G_1$ und damit $c+ax_0+by_0=0$ ist.
Ebenso ist $\alpha x+\beta y+\gamma = \alpha\tilde{x}+\beta\tilde{y}+\gamma+\alpha x_0+\beta y_0 = \alpha\tilde{x}+\beta\tilde{y}$,
weil $(x_0, y_0) \in G_2$ – also $\gamma+\alpha x_0+\beta y_0 = 0$ ist.

$$\Rightarrow \quad \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = f\left(\frac{a\tilde{x}+b\tilde{y}}{\alpha\tilde{x}+\beta\tilde{y}}\right),$$ und es liegt der Typ Beispiel (4) vor,

eine homogene Differentialgleichung.
Fall 2: $a\beta = b\alpha$. In diesem Fall sind G_1 und G_2 parallel – es gibt kein Schnittpunkt (außer $G_1 = G_2$). Wir setzen (falls $\beta \neq 0$)

$$u(x) = \alpha x+\beta y+\gamma$$

$$\Rightarrow \frac{ax+by+c}{u} = \frac{\beta ax+\beta by+\beta c}{\beta u} = \frac{\alpha bx+\beta by+\beta c}{\beta u}$$

$$= \frac{b(\alpha x+\beta y+\gamma)+c\beta-b\gamma}{\beta u} = \frac{b}{\beta}+\frac{c\beta-b\gamma}{u}$$

$$= A+\frac{B}{u}$$

$\Rightarrow \quad u'(x) = \alpha+\beta y' = \alpha+\beta f\left(A+\frac{B}{u}\right)$ – eine separierte Dgl.
(Falls $\beta = 0$, so ist $b \neq 0$ (weil sonst eine triviale Dgl $y' = f(x)$ vorliegt) und man setzt $u(x) = ax+by+c$ und verfährt analog

Bemerkung: Während die Substitution der Variablen x durch eine "neue" Variable v, $x = x(v)$, im allgemeinen keine Überführung in die separierte Form bewirkt, kann dies für "gekoppelte" Transformationen $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ sehr wohl der Fall sein. Wie sich Dgl'n unter solche allgemeinen Substitutionen

§ 5 Die Substitutions-Transformation für gewöhnliche Differentialgleichungen.

Wir haben gesehen, daß zum Beispiel bei Dgl'n der Form

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

eine verhältnismäßig einfache Substitution – nämlich $y = x \cdot u$ – eine einfachere Dgl für $u = u(x)$ ergibt. Ebenso kann man Gleichungen der Form

$$y' = f(ax + by + c)$$

vermöge der Substitution $u = ax + by + c$ in eine separierte Form überführen. Wir wollen nun diesen Sachverhalt allgemein studieren. Dazu bemerken wir zuvor:

Bemerkung: Durch eine "implizite" Gleichung

$$\Phi(x, y) = \text{const}$$

wird im allgemeinen eine Gleichung zwischen y und x definiert, welche in der Regel nur lokal nach y auflösbar ist. So folgt z.B. aus

$$x^2 + y^2 = 1$$

die Auflösung $y = \sqrt{1 - x^2}$ bzw. $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Das heißt, daß $y(x)$ die Identität

$$\Phi(x, y(x)) = \text{const}$$

erfüllt. Die Tangentensteigungen der durch $\Phi = \text{const}$ definierten Kurve $y = y(x)$ findet man nun durch Differentiation dieser Gleichung nach x:

$$\frac{d}{dx}\Phi(x, y(x)) = \frac{d}{dx}\text{const} = 0.$$

Wie man bei Funktionen mehrerer Variabler zeigt, ist

$$\frac{d}{dx}\Phi(x, y(x)) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' = 0$$

sodaß folgt:

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y(x))} .$$

Hierbei bedeutet $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ die "partielle Ableitung" von Φ nach x bzw nach y, und $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ist die gewöhnliche Ableitung von $\Phi(x,y)$ nach x, wenn man y als konstanten Parameter behandelt.

<u>Beispiel:</u> $\Phi(x,y) = x^2 + e^{xy} + xy$

$$\Rightarrow \Phi_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x + y e^{xy} + y$$

$$\Phi_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = x e^{xy} + x$$

<u>Beispiel:</u> Die Tangentensteigung der Kreislinie $x^2 + y^2 = 1$ ist

$$y'(x) = -\frac{\Phi_x}{\Phi_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y} \quad \text{für } y = \sqrt{1-x^2} ,$$

in Übereinstimmung mit der gewöhnlichen Ableitung

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2} = y'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} .$$

Es liege nun eine Dgl in der expliziten Form

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

vor. Nun führt man "neue" Koordinaten (v,u) mittels der Gleichungen

$$\boxed{x = x(v,u) \quad , \quad y = y(v,u)}$$

ein, und wir wollen untersuchen, welche Dgl zwischen den neuen Koordinaten v und u besteht, welche äquivalent zur gegebenen Dgl ist.

Mit den übersichtlicheren Symbolen x_u statt $\frac{\partial}{\partial u} x(u,v)$ usw. gilt nun

Theorem (Substitutions-Transformationsregel)

Die gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung,

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

wird durch die Transformation $\boxed{x = x(v,u), \quad y = y(v,u)}$ in die äquivalente Differentialgleichung

$$u'(v) = \frac{du}{dv} = g(v,u) := \frac{-y_v(v,u) + x_v(v,u) f(x(v,u), y(v,u))}{y_u(v,u) \pm x_u(v,u) f(x(v,u), y(v,u))}$$

bzw. kurz: $\boxed{u' = \frac{-y_v + x_v y'}{y_u - x_u y'}}$ (mit $u' = \frac{du}{dv}$, $y' = \frac{dy}{dx}$, alles ausgedrückt in v,u)

übergeführt. Ist $u = g(v)$ deren Lösung, so liefert $u(x,y) = g(v(x,y))$ i.a. eine (implizite) Lösung $y = y(x)$.

Beweis: Es sei $y(x)$ eine Lösung der Dgl $y' = f(x,y)$, welche also zumindest lokal in der expliziten Form

$$y = F(x) \quad \text{bzw.} \quad y - F(x) \equiv 0$$

vorliegt. Das heißt also, daß

$$G(v,u) := y(v,u) - F(x(v,u)) \equiv 0$$

eine Gleichung zwischen u und v bewirkt, deren (lokale) Lösungskurve $v = v(u)$ auch die Lösungskurve der transformierten Dgl – welche wir jetzt herleiten – ist.

$$G(v,u) \equiv 0 \iff \frac{d}{dv} G(v,u) = \frac{\partial G}{\partial v} + \frac{\partial G}{\partial u} \cdot \frac{du}{dv} = 0$$

$$\iff y_v - F'(x(v,u)) \cdot x_v + \{ y_u - F'(x(v,u)) \cdot x_u \} \frac{du}{dv} = 0$$

Implizite Differentiation

Wegen $y'(x) = f(x,y)$ für die Lösungskurve $y(x)$ erhalten wir somit durch Umstellung den gewünschten Ausdruck.

Wir bemerken, daß die explizite Darstellung von y als Lösung keine sonderliche Einschränkung bedeutet. Ist nämlich i.a. die Lösung von

$$y' = f(x,y)$$

durch eine (implizite) Gleichung $\Phi(x,y) = \text{const}$ gegeben, so ist zum einen

$$0 = \frac{d}{dx}\Phi(x,y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} \Rightarrow y' = -\frac{\Phi_x}{\Phi_y}$$

Zum anderen folgt aus der substituierten Gleichung

$$\Psi(v,u) := \Phi(x(v,u), y(v,u)) = \text{const}$$

die Dgl: $\Psi_v + \Psi_u \cdot \frac{du}{dv} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \Phi_x \cdot x_v + \Phi_y y_v + \{\Phi_x \cdot x_u + \Phi_y y_u\}\frac{du}{dv} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{du}{dv} = -\frac{\Phi_x x_v + \Phi_y y_v}{\Phi_x x_u + \Phi_y y_u} = -\frac{\Phi_y\left\{x_v \frac{\Phi_x}{\Phi_y} + y_v\right\}}{\Phi_y\left\{x_u \frac{\Phi_x}{\Phi_y} + y_u\right\}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{du}{dv} = \frac{x_v f - y_v}{-x_u f + y_u}}$$, die gleiche Formel w. o.

iem → S. 30a

<u>Beispiele:</u> (1) Für die Dgl $y' = f(y/x)$ wurde substituiert $u = y/x$. Das heißt, daß die Transformationen lauten

$$\left.\begin{array}{l} x = v \\ y = vu \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{du}{dv} = \frac{du}{dx} = \frac{1\, f(u) - u}{0\, f(u) + v} = \frac{1}{x}\{f(u) - u\},$$

das gleiche Resultat wie früher

<u>Bemerkung</u>: Die Dgl für $u = u(v)$ kann auch – formal einfacher – so hergeleitet werden: Es sei

$$y' = f(x,y)\ ,\ \text{also}\ \text{"}dy - f(x,y)\,dx = 0\text{"}.$$

Aus $x = x(v,u)$ und $y = y(v,u)$ folgt

$$dx = x_v\,dv + x_u\,du \quad \text{und} \quad dy = y_v\,dv + y_u\,du\ ,$$

(was wir hier nicht näher erklären wollen). Eingesetzt ergibt dies:

$$y_v\,dv + y_u\,du - f(x(v,u), y(v,u))\,(x_v\,dv + x_u\,du) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad du\,\{-x_u f + y_u\} + dv\,\{y_v - x_v f\} = 0\ ,$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{du}{dv} = u'(v) = \frac{x_v f - y_v}{-x_u f + y_u}\ , \quad \text{wie gewünscht.}$$

Diese Herleitung ist "elementarer", da sie nicht von einer impliziten Lösungsgleichung ausgeht, sondern lediglich die "Differentiale" dx und dy durch die Differentiale dv und du ausdrückt.

<u>Bemerkung</u>: Für den Fall, daß die Differentialgleichung in der formalen Bruchform vorliegt,

$$y' = f(x,y) = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\ ,$$

welche man üblicherweise in Differentialform-Schreibweise schreibt,

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0\ ,$$

lautet die Differentialform-Schreibweise bezgl. der (v,u)-Koordinaten

$$(x_u P + y_u Q)\,du + (x_v P + y_v Q)\,dv = 0$$

(2) In der Dgl $y' = f(ax+by+c)$ haben wir $u = ax+by+c$ gesetzt. Mit

$$\begin{aligned} x &= v \\ y &= \tfrac{1}{b}\{u - av - c\} \end{aligned}$$

folgt

$$\frac{du}{dv} = \frac{du}{dx} = \frac{1\,f(u) + a/b}{0\,f(u) + 1/b} = a + b f(u).$$

(3) Gegeben ist die Dgl

$$\left(\frac{y}{R_1^3} + q\frac{y}{R_2^3}\right) - \left(\frac{x-a}{R_1^3} + q\,\frac{x+a}{R_2^3}\right) y' = 0$$

mit $R_1^2 = (x-a)^2 + y^2$, $R_2^2 = (x+a)^2 + y^2$. Man setzt

$v = \frac{x+a}{y}$ und $u = \frac{x-a}{y}$ also $\iff x = a\,\frac{v+u}{v-u}$, $y = \frac{2a}{v-u}$

$\Rightarrow R_1^2 = y^2(1+u^2)$, $R_2^2 = y^2(1+v)^2$, also

$$y' = \frac{\frac{1}{y^3(1+u^2)^{3/2}} + q\,\frac{1}{y^3(1+v^2)^{3/2}}}{\frac{u}{y^3(1+u^2)^{3/2}} + q\,\frac{v}{y^3(1+v^2)^{3/2}}} = \frac{(1+v^2)^{3/2} + q(1+u^2)^{3/2}}{u(1+v^2)^{3/2} + q\,v(1+u^2)^{3/2}}$$

Es ist $x_v = \frac{-2au}{(v-u)^2}$, $x_u = \frac{2av}{(v-u)^2}$, $y_v = \frac{-2a}{(v-u)^2}$, $y_u = \frac{2a}{(v-u)^2}$

$$\Rightarrow \frac{du}{dv} = \frac{\frac{-2au}{(v-u)^2}\cdot y' + \frac{2a}{(v-u)^2}}{\frac{-2av}{(v-u)^2}\cdot y' + \frac{2a}{(v-u)^2}} = \frac{-u y' + 1}{-v y' + 1}.$$

Nun ist y' von der Form P/Q;

$$\frac{du}{dv} = \frac{-uP + Q}{-vP + Q} = \frac{(1+u^2)^{3/2}\{qu - qv\}}{(1+v^2)^{3/2}\{u - v\}} = q\,\frac{(1+u^2)^{3/2}}{(1+v^2)^{3/2}}$$

Dies ist eine separierte Dgl. Die Stammfunktion von $\int \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}\,dt$

[illegible] man mit einem Kniff wie folgt aus:

Beginne mit partieller Integration für $(1+t^2)^{-1/2}$.

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^{1/2}} = \frac{t}{(1+t^2)^{1/2}} - \int \frac{t \cdot 2t \cdot -\frac{1}{2}}{(1+t^2)^{3/2}} = \frac{t}{(1+t^2)^{1/2}} + \int \frac{t^2(+1-1)}{(1+t^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{t}{(1+t^2)^{1/2}} + \int \frac{1}{(1+t^2)^{1/2}} - \int \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}} = \frac{t}{(1+t^2)^{1/2}}.$$

(Dies ist übrigens ein ähnlicher Trick wie bei den $\frac{1}{(1+t^2)^m}$ - Integralen.)

$$\Rightarrow \frac{u}{(1+u^2)^{1/2}} + q \frac{v}{(1+v^2)^{1/2}} = \text{const.}$$

Dies ist die implizite Lösungsgleichung zwischen u und v - die durch Einsetzen zu einer Lösungsgleichung zwischen y und x wird:

$$y^2 \left\{ \frac{x-a}{R_1^3} + q \frac{x+a}{R_2^3} \right\} = c$$

(beachte aber, daß R_1 und R_2 von x und y abhängen.

(4) Gegeben ist die Dgl

$$y' = - \frac{x+y^2}{-xy+y},$$

welche weder homogen, linear noch separiert ist. Wir versuchen, ob durch einen Wechsel zu Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi, \quad \text{also} \quad x_r = \cos\varphi, \quad x_\varphi = -r\sin\varphi$$
$$y = r\sin\varphi, \quad \text{also} \quad y_r = \sin\varphi, \quad y_\varphi = r\cos\varphi$$

die Gleichung lösbar wird mit der Rolle $u \equiv r$ und $v \equiv \varphi$ führt die Transformationsformel auf

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{x_\varphi f - y_\varphi}{-x_r f + y_r} = \frac{-r\sin\varphi \cdot f - r\cos\varphi}{-\cos\varphi f + \sin\varphi} = -r \frac{f\sin\varphi + \cos\varphi}{-f\cos\varphi + \sin\varphi}$$

Wir substituieren r und φ in die Funktion f und erhalten

$$g(\varphi, r) = f(x(\varphi,r), y(\varphi,r)) = -\frac{r\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi}{-r^2\cos\varphi\sin\varphi + r\sin\varphi} = -\frac{\cos\varphi + r\sin^2\varphi}{-r\cos\varphi\sin\varphi + \sin\varphi}$$

Hieraus folgt nun für $r'(\varphi)$ – indem wir zunächst die Struktur $g = -\frac{P}{Q}$ verarbeiten (um mehrfache Brüche zu vermeiden):

$$\frac{dr}{d\varphi} = -r\,\frac{-\frac{P}{Q}\sin\varphi + \cos\varphi}{\frac{P}{Q}\cos\varphi + \sin\varphi} = -r\,\frac{Q\cos\varphi - P\sin\varphi}{P\cos\varphi + Q\sin\varphi}$$

$$= -r\,\frac{-r\cos^2\varphi\sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi - \cos\varphi\sin\varphi - r\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi\cos\varphi + -r\cos\varphi\sin^2\varphi + \sin^2\varphi}$$

$$= -r^2\,\frac{-\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi}{1} = r^2\sin\varphi\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$$

$$\Longrightarrow \frac{dr}{d\varphi} = r^2\sin\varphi \quad \text{, eine einfache separierte Dgl.}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{dr}{r^2} = \sin\varphi\, d\varphi \Longleftrightarrow -\frac{1}{r} = -\cos\varphi + C \Longleftrightarrow \frac{1}{r} = \cos\varphi + C$$

$$\Longleftrightarrow r = \frac{1}{\cos\varphi + C}.$$

Dies ist die Lösung der transformierten Dgl – sogar in expliziter Form

$$\Longleftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + C} \Longleftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x + C\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{x + c\sqrt{x^2+y^2} = 1}$$

Die Gleichung ist nur für $c \neq 0$ sinnvoll (für $c = 0$ ist $x = 1$ eine singuläre Lösung), und man kann sie leicht explizit auflösen

$$y^2 = x^2(1-c^2) - 2x + 1.$$

Bemerkung: Merke die Transformationsformel nach verbalem Muster siehe Neufassung §6 neu

§6 Bernoulli- und Riccati-Differentialgleichungen

Die Differentialgleichung sind solche einer speziellen Bauart; die nachfolgende Ausführung zeigt, daß Substitutionsmethoden oft geeignet sind, Differentialgleichungen auf bekannte Formen zu überführen

Theorem I (Bernoulli-Differentialgleichung)

Es seien $g(x)$ und $h(x)$ in $-\infty \leq a < b \leq \infty$ stetige Funktionen. Die Differentialgleichung

$$\boxed{y'(x) + g(x)y(x) + h(x)y^n(x) = 0}$$

besser $y' = Py^m + Qy$

mit $n \in \mathbb{Z}$ heißt Bernoulli-Dgl (n-ten Grades). Die Sonderfälle $n = 0$ und $n = 1$ sind lineare, homogene Dgl'n.

Es gilt: Die Substitution $u(x) = y^{1-n}_{(x)}$ führt die Dgl in die äquivalente inhomogene lineare Dgl über,

$$u'(x) + (1-n)g(x)u(x) = (n-1)h(x)$$

und kann somit vollständig gelöst werden. Außerdem ist $y \equiv$ eine Lösung der Dgl.

Beweis: $u(x) = y^{1-n} \Rightarrow u' = (1-n)y^{-n} \cdot y' = (1-n)y^{-n}\{-gy - hy^n$

$\Leftrightarrow \quad u' = -(1-n)gy^{1-n} - (1-n)h = -(1-n)gu + (n-1)h$ qed.

Beispiel: $y' = y + xy^2$ geht mit $u = y^{1-2} = 1/y$ über in

$$u' + u = -x,$$

welche die Lösung hat: $u = -x + 1 + Ke^{-x}$; also $y(x) = \dfrac{1}{-x+1+Ke^{-x}}$

Theorem II (Riccati-Differentialgleichung

Hierbei handelt es sich um eine Differentialgleichung vom Typ

$$(*) \qquad y'(x) + g(x)\,y(x) + h(x)\,y^2(x) = f(x)$$

(also quasi eine "inhomogene" Bernoulli-Dgl 2. Grades), die man auch so schreiben kann

$$(*) \qquad y'(x) = a(x)\,y^2(x) + b(x)\,y(x) + c(x).$$

(y' ist also ein "Polynom in y" von 2. Grad).

Bem. a) Im allgemeinen gibt es keine geschlossene Lösungsformeln

b) Durch Probieren, Potenzreihen-Methode oder durch Ansatz mit einem geeigneten (parameterabhängigen) Funktionstyp kann in manchen Fällen eine Lösung "gefunden" werden.

Thm (1) Ist y_0 irgendeine Lösung von $(*)$, so findet man dann aber auch alle Lösungen. Und zwar gilt dann

$$y \text{ löst } (*) \iff u(x) := \frac{1}{y(x) - y_0(x)} \text{ löst die inhomogene}$$

lineare Dgl 1. Ordnung: $u'(x) - \{g(x) + 2h(x)\,y_0(x)\}\,u(x) = h(x)$

(2) Für eine Funktion $w(x)$ heißt

$$y(x) = -\frac{w'(x)}{w(x)} \cdot \frac{1}{a(x)} \qquad \underline{\text{Riccati-Transformation (für } (*))}$$

Es gilt: y löst $(*) \iff w$ löst die lineare homogene Differentialgleichung 2ter Ordnung

$$w''(x) - \left\{\frac{a'(x)}{a(x)} + b(x)\right\} w'(x) + a(x)\,c(x)\,w(x) = 0,$$

also $w'' + \alpha w' + \beta w = 0$ mit Funktionen α, β.

(1)

Beweis: Es ist $u'(x) = \frac{-1}{(y-y_0)^2}\{y'-y_0'\} = -u^2\{y'-y_0'\}$

$$= -u^2\{f(x) - g(x)y(x) - h(x)y^2(x) - f(x) + g(x)y_0(x) + h(x)y_0^2(x)\}$$

$$= u^2\{g(x)\cdot\frac{1}{u} + h(x)(y^2-y_0^2)\}.$$

Nun ist $y^2-y_0^2 = y^2-2yy_0+y_0^2+2yy_0-2y_0^2 = (y-y_0)^2+2y_0(y-y_0)$

$\Rightarrow u^2(y^2-y_0^2) = 1+2y_0u$; woraus folgt

$$u'(x) = gu + h + 2y_0hu = (g+2y_0h)u + h. \Rightarrow (1)$$

(2) Auch die Riccati-Transformation besteht in einer simplen Überprüfung:

Es ist $w'/w = -ay$, also $w = Ke^{-\int ay}$. Nun folgt aus

$$w' = -ayw \quad \text{auch} \quad w'' \overset{(\circ)}{=} -a'yw - ay'w - ayw' \Rightarrow y' = (A)$$

Um die Dgl für w zu finden setzen wir alles in (*) ein:

$$(A) \quad y' \overset{(\circ)}{=} \frac{1}{aw}\{-w''-a'yw-ayw'\} \overset{(*)}{=} a\frac{w'^2}{w^2a^2} - \frac{b}{a}\frac{w'}{w} + c$$

$$\Leftrightarrow -w''-a'yw-ayw' = \frac{w'^2}{w} - bw' + caw$$

$$\Leftrightarrow -w'' + \frac{a'}{a}w' + \frac{w'^2}{w} = \frac{w'^2}{w} - bw' + caw$$

$$\Leftrightarrow w'' - w'\{\frac{a'}{a}+b\} + caw = 0.$$

Beispiel: $y' = e^xy^2 - y + e^{-x}$ wird mit $y = -\frac{w'}{w}\cdot e^{-x}$ auf die w-Gleichung

$$w'' - \{1-1\}w' + e^{-x}e^xw = w''+w = 0$$

transformiert, welche die Lösung besitzt

Die ursprüngliche Lösung finden wir einfach durch Einsetzen in die Riccati-Transformation

$$y = -e^{-x}\cdot\frac{w'}{w} = -e^{-x}\,\frac{-A\sin x + B\cos x}{A\cos x + B\sin x}\;,\quad A,B\in\mathbb{R}$$

oder $y(x) = e^{-x}\,\dfrac{A\sin x + B\cos x}{-A\cos x + B\sin x}\;,\quad A,B\in\mathbb{R}$

oder $y(x) = e^{-x}\,\dfrac{C\,\mathrm{tg}\,x + 1}{\mathrm{tg}\,x - C}$ mit $C\in\mathbb{R}$

<u>Bemerkung:</u> Substitutionsmethoden finden wir auch bei Dgl'n höherer Ordnung, z.B. bei der <u>Euler-Dgl</u>

$$x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0 y = 0\;;$$

setzt man nämlich $x = e^t$, $t = \ln x$, so genügt die Funktion

$$u(t) := y(e^t)$$

einer Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeff.

$$u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + b_0 u = 0$$

$$xy' + \overset{h}{\cancel{f}}(x)(y^2 - x^2) - y = 0 \quad (\text{Ricc.})$$

$y = \pm x$ Lösung $\rightsquigarrow$ $u(x) = \dfrac{1}{y-x}$ verwenden

$$y' + -\frac{1}{x}y + \frac{h(x)}{x}y^2 = \frac{h(x)}{x}x^2 = x\,h(x)$$

§ 7 Exakte Differentialgleichungen; Methode der integrierenden Faktoren

Es liege eine Differentialgleichung in der Form

$$(*) \quad g(x,y) + h(x,y)\,y'(x) = 0$$

Oft benutzt man auch die Schreibweise als "Differentialform"

$$(*)' \quad g(x,y)\,dx + h(x,y)\,dy = 0$$

Die Differentialgleichung (*) ist letztlich mit der expliziten Form

$$y' = f(x,y)$$

gleichwertig; nämlich: $y' = f(x,y) \iff dy - f(x,y)\,dx = 0$.
Allerdings hat die Form (*) einen hohen Verlust an "Eindeutigkeit"
Es gilt offenbar

$$g(x,y)\,dx + h(x,y)\,dy = 0$$

$$\iff M(x,y)g(x,y)\,dx + M(x,y)h(x,y)\,dy = 0$$

für alle möglichen Funktionen M der beiden Variablen x und y (mit $M \neq 0$). Daher ist die Aufspaltung

$$y' = f(x,y) =: -\frac{g(x,y)}{h(x,y)} \iff h\,dx + g\,dy = 0$$

in zwei Faktoren g und h äußerst willkürlich und nur "eindeutig" bis auf einen solchen "integrierenden" Faktor $M(x,y)$
Der Umstand, daß eine Dgl

$$g\,dx + h\,dy = 0 \quad \text{zu} \quad Mg\,dx + Mh\,dy = 0$$

gleichwertig ist, führt auf eine Methode, welche unter dem Namen "Methode der integrierenden Faktoren" bekannt ist. Wir kommen darauf zurück.

Bemerkung (Idee der exakten Differentialgleichung)
Sei $F(x,y)$ eine (in beiden Variablen x und y) differenzierbare Funktion. Dann wird durch die Gleichung

$$F(x,y) = \text{const} = c \quad (\text{mit } c \in \text{Bild } F)$$

eine Relation zwischen x und y etabliert. Dort, wo $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \neq$ [0] ist, liefert dies auch in der Tat eine Funktion

$$y = y(x)$$

(die man in der Praxis durch rechentechnisches Auflösen der Gleichung $F(x,y)=c$ nach y gewinnt); $F(x,y)=c$ ist die implizite Form der (möglicherweise auflösbaren) Gleichung $y=y($[x)].
Es ist dann für alle x aus einem Intervall

$$F(x, y(x)) = \text{const},$$

und durch Differenzieren erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} =: F_x + F_y \cdot y' = 0.$$

Das bedeutet: die Lösungskurve $y(x)$ der impliziten Gleichung $F(x,y)=c$ erfüllt die Dgl

$$g(x,y) + h(x,y)\, y' = 0 \quad \text{mit} \quad \begin{cases} g(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \\ h(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \end{cases}$$

Konsequenz: Liegt eine Gleichung (*) vor und wären (zufälligerweise) die Funktionen g und h partielle Ableitungen einer gewissen

Funktion $F(x,y)$ in der vorbeschriebenen Weise, so würde die Gleichung $F(x,y) = const$ nach Auflösung nach y eine Lösung liefern.
Wann haben nun Funktionen $g(x,y)$ und $h(x,y)$ solche Eigenschaft?

Definition und Satz (Exaktheitskriterium)
Eine Dgl (*) bzw.

$$g(x,y)\,dx + h(x,y)\,dy = 0$$

heißt exakt $\Leftrightarrow$ es gibt ein $F(x,y)$ mit

$$\left.\begin{aligned} g(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} F(x,y) \\ h(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y} F(x,y) \end{aligned}\right\} \forall (x,y) \in \Omega,$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes Gebiet ist. Ist Ω "einfach zusammenhängend" - dh., hat Ω keine Löcher, so gilt:

$$\left\{ g = \frac{\partial}{\partial x} F \text{ und } h = \frac{\partial}{\partial y} F \right\} \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Die Exaktheitsbedingung läßt sich also äußerst einfach überprüfen. Man leitet g nach y und h nach x ab - dann müssen die Ergebnisse vorliegen.

Beispiel: $(2x^3 - xy^2)\,dx + (2y^3 - x^2y)\,dy = 0$ ist eine exakte Dgl, denn

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x^3 - xy^2) = -2xy = \frac{\partial}{\partial x}(2y^3 - x^2 y).$$

Die Exaktheitsbedingung besagt, daß man die Differentialform $g\,dx + h\,dy$ in Ω wegunabhängig integrieren kann. Hieraus schließlich entstammt das nachfolgende

Lösungsverfahren für exakte Differentialgleichung

(1) Überprüfe, ob die vorliegende Differentialgleichung

$$g(x,y)\,dx + h(x,y)\,dy = 0$$

exakt ist. Wenn ja:

(2) Errechne die (implizite) Stammfunktion durch zwei getrennte Integrationen

(I) $F(x,y) = \int^x g(x,y)\,dx + C(y)$

(II) $F(x,y) = \int^y h(x,y)\,dy + D(x)$,

wobei in I und II jeweils eine Stammfunktion berechnet wird bezüglich der Variablen x (I) bzw. der Variablen y (II) und wobei hierbei die jeweils andere Variable als konstanter Parameter behandelt wird. C und D sind zunächst unbekannte Funktionen.

(3) Die Bestimmung von C bzw. von D folgt durch Gleichsetzung von (I) und (II) und einem Vergleich der Funktionsterme.
Hierbei gilt das Prinzip

Unabhängigkeitsprinzip: Sind $D_1(x)$ und $D_2(x)$ sowie $C_1(y)$ und $C_2(y)$ Funktionen der beiden unabhängigen Variablen x, y, so folgt aus

$$D_1(x) + C_1(y) = D_2(x) + C_2(y) \quad \forall x,y \in \Omega$$

$$D_1(x) = D_2(x) + c \quad \text{und} \quad C_1(y) = C_2(y) + d \quad \text{mit } d = -c.$$

(4) Hat man $F(x,y)$ auf diese Weise bestimmt, so liefert jedes $c \in \text{Bild } F$ eine implizite Lösung

$$F(x,y) = c$$

Bemerkung: Gleichwertig zu (2) und (3) ist die Vorgehensweise, $F(x,y)$ vermöge der Formel

$$F(x,y) = \int^x g(t,y)\,dt + \int^y h(x,t)\,dt + C$$

zu bestimmen (und zwar ungeachtet der unteren Integrationsgrenze).

Beispiele ① Für die exakte Gleichung

$$(2x^3 - xy^2)\,dx + (2y^3 - x^2y)\,dy = 0$$

finden wir:

$$(\mathrm{I}):\quad F(x,y) = \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{2}x^2y^2 + C(y)$$
$$(\mathrm{II}):\quad F(x,y) = \tfrac{1}{2}y^4 - \tfrac{1}{2}x^2y^2 + D(x),$$

woraus durch Gleichsetzen zusammen mit dem Unabhängigkeitsprinzip folgt

$$C(y) = \tfrac{1}{2}y^4 \quad \text{und} \quad D(x) = \tfrac{1}{2}x^4;$$

$$F(x,y) = \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{2}y^4 - \tfrac{1}{2}x^2y^2 = c \quad (\in \mathbb{R}_+) \quad \text{und}$$

$$y = \pm\sqrt{+\tfrac{x^2}{2} + \sqrt{c - \tfrac{3}{4}x^4}}$$

sind implizite und explizite Lösungen dieser Dgl.

② Die Dgl $\left(1 - \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = 0$ ist exakt.

$$(\mathrm{I})\ F(x,y) = \int^x \left(1 - \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx = x - \arctan\frac{x}{y} + C(y)$$

$$\mathrm{II}\ (F(x,y) = x\int \frac{1}{x^2+y^2}\,dy = \arctan y/x + D(x)$$

Nun ist $\arctan z = -\arctan 1/z + \pi/2$ (denn $\frac{d}{dz}(\arctan z) = \frac{1}{1+z^2}$ und $\frac{d}{dz}(\arctan 1/z) = \frac{1}{1+(1/z)^2}\cdot\frac{-1}{z^2} = -\frac{1}{1+z^2}$, so daß $\arctan z = -\arctan 1/z + c$

wobei $c = \pi/2$ durch Auswertung an der Stelle $z = 1$ her resultiert

③ Die Dgl $x^3+y^3y'=0$ ist exakt.

(I) $F(x,y)=\frac{1}{4}x^4+C(y)$ und (II) $F(x,y)=\frac{1}{4}y^4+D(x)$

$\Rightarrow F(x,y)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{4}y^4=c$ liefert implizite Lösung.

(Diese Dgl ist offenbar aber auch separiert, so daß die Lösung auch in bekannter Weise ermittelt wird).

<u>Die Methode der integrierenden Faktoren</u> Wie wir eben dargelegt haben, ist die Darstellung

$$g(x,y)dx+h(x,y)dy=0$$

bezüglich der Koeffizientenfunktionen g und h nicht eindeutig. So ist etwa

(a) $(x^2+y)dx-x\,dy=0$

gleichwertig zur mit $1/x^2$ multiplizierten Gleichung

(b) $\left(1+\frac{y}{x^2}\right)dx-\frac{1}{x}dy=0$

gleichwertig. Wir stellen fest: Gleichung (a) ist nicht exakt, Gleichung (b) aber sehr wohl. Dies legt die Frage nahe: Kann man bei gegebener Dgl

$$g(x,y)dx+h(x,y)dy=0$$

durch Multiplikation mit einem Faktor $M(x,y)$ (dem sog. "integrierenden Faktor" bzw. "Euler'schen Multiplikator") erreichen, daß die neue Dgl

$$\left(M(x,y)g(x,y)\right)dx+\left(M(x,y)h(x,y)\right)dy=0$$

– welche wie gesagt zur ursprünglichen gleichwertig ist – exakt ist?

Sehr leicht läßt sich diese Bedingung für $M(x,y)$ formulieren:

Die neue Dgl ist exakt, wenn

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(M(x,y)g(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(M(x,y)h(x,y)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\, g(x,y) + M(x,y)\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial M}{\partial x}(x,y)\, h(x,y) + M(x,y)\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)$$

kurz: $\begin{cases} M_y g - M_x h = M(h_x - g_y) \\ M_y g + M g_y = M_x h + M h_x \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \frac{M_x}{M} = \frac{g_y - h_x}{h} \stackrel{!}{=} F_u(x) \\ \frac{M_y}{M} = \frac{h_x - g_y}{g} \stackrel{!}{=} F_u(y) \end{cases}$

erfüllt ist. Diese Bedingung ist eine "lineare, partielle Differentialgleichung erster Ordnung zweier Variablen" für M. Für die Praxis empfiehlt es sich aber eher, M durch Probieren als durch Lösen dieser Dgl zu finden.

Beispiele ①: $(x^2+y)\,dx - x\,dy = 0$ (nicht exakt)

$\Leftrightarrow (1 + \frac{y}{x^2})\,dx - \frac{1}{x}\,dy = 0$ (exakt)

Lösung: (I) $F(x,y) = \int (1 + \frac{y}{x^2})\,dx = x - \frac{y}{x} + C(y)$

II $F(x,y) = \int -\frac{1}{x}\,dy = -\frac{y}{x} + D(x)$

$\Rightarrow F(x,y) = -\frac{y}{x} + x = c$ liefert die Lösung $y = x^2 + cx$ der ursprünglichen Dgl.

② Die Dgl $xy^3\,dx + (x^2y^2 - 1)\,dy = 0$ ist nicht exakt. Multiplikation mit $M(x,y) = 1/y$ ergibt aber eine exakte Dgl:

$$xy^2 + (x^2y - 1/y)\,dy = 0,$$

denn $\frac{\partial}{\partial y}(xy^2) = 2xy = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y - 1/y)$, und es ist

(I) $F(x,y) = \int xy^2\,dx = \frac{1}{2}x^2y^2 + C(y)$

II $F(x,y) = \int (x^2y - 1/y)\,dy = \frac{1}{2}x^2y^2 - \ln|y| + D(x)$,

$\Rightarrow C(y) = \ln y$ und $D(x) = \text{const}$, also

$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 - \ln|y| = C$ liefert eine implizite Form der Lösun

Es kann natürlich auch sein, daß eine nicht-exakte Dgl

$$g(x,y)\,dx + h(x,y)\,dy = 0$$

durch eine Substitutionstransformation in eine Dgl überführt wird, die einen einfachen integrierenden Faktor besitzt:

(3) $y - \left\{a\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 + x\right\} y' = 0$. Hier führen wir Polarkoordinaten ein:

$$x = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{d\varphi} = \frac{x_\varphi y' - y_\varphi}{-x_r y' + y_r} = \frac{-r\sin\varphi\, y' - r\cos\varphi}{-\cos\varphi\, y' + \sin\varphi}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dr}{d\varphi} = -r\,\frac{\sin\varphi\, y' + \cos\varphi}{\sin\varphi - \cos\varphi\, y'} \Leftrightarrow \frac{dr}{d\varphi}\{\sin\varphi - \cos\varphi\, y'\} = -r\{\sin\varphi\, y' + \cos\varphi\}$$

Es ist $y' = \dfrac{y}{a\sqrt{(x^2+y^2)^3} + x} = \dfrac{r\sin\varphi}{ar^3 + r\cos\varphi} = \dfrac{\sin\varphi}{ar^2 + \cos\varphi}$

$$\Rightarrow \frac{dr}{d\varphi}\left\{\sin\varphi - \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{ar^2+\cos\varphi}\right\} = -r\left\{\frac{\sin^2\varphi}{ar^2+\cos\varphi} + \cos\varphi\right\} \quad \Big|\cdot(ar^2+\cos\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dr}{d\varphi}\{ar^2\sin\varphi + \cos\varphi\sin\varphi - \cos\varphi\sin\varphi\} = -r\{\sin^2\varphi + ar^2\cos\varphi + \cos^2\varphi\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dr}{d\varphi}\{ar\sin\varphi\} = -\{1 + ar^2\cos\varphi\}. \text{ Hieraus folgt}$$

$$dr\underbrace{\{ar\sin\varphi\}}_{g} + \underbrace{\{1+ar^2\cos\varphi\}}_{h}d\varphi = 0 \quad \left\}\ \begin{aligned} &g_\varphi - h_r = -ar\cos\varphi \\ &\Rightarrow \frac{g_\varphi - h_r}{g} = -\underbrace{\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}}_{=f(\varphi)} \end{aligned}\right.$$

Durch einfaches Probieren finden wir einen integrierenden Faktor, nämlich $\sin\varphi$.

$$= \frac{h_r - g_\varphi}{g} = -\frac{\mu'}{\mu}$$

Daher ist also die Dgl

exakt und der allgemeine Lösungsformalismus ergibt:

$$G(\varphi, r) = \int \sin\varphi\{1 + ar^2\cos\varphi\}\, d\varphi + C(r)$$

$$= -\cos\varphi + \tfrac{1}{2} ar^2 \sin^2\varphi + C(r)$$

$$G(\varphi, r) = \int ar\sin^2\varphi\, dr + D(\varphi) = \tfrac{1}{2} ar^2 \sin^2\varphi + D(\varphi).$$

Gleichsetzen ergibt: $-\cos\varphi + C(r) = D(\varphi)$
also: $D(\varphi) = -\cos\varphi + \text{const}$ und $C(r) = -\text{const}$.

$\Rightarrow G(\varphi, r) = \tfrac{1}{2} ar^2\sin^2\varphi - \cos\varphi = \text{const}$
liefert die implizite Lösungen. Ersetzen der ursprünglichen Variablen x, y führt auf die implizite Lösung der ursprünglichen Dgl:

$$F(x,y) = \tfrac{1}{2} a y^2 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \text{const}.$$

§8 Implizite Differentialgleichungen 1. Ordnung, Clairaut's – Gleichung

Nicht immer liegt der Fall vor, daß wir eine Differentialgleichung in der expliziten Form

$$y' = f(x, y)$$

vorliegen haben. Vielmehr ist es so, daß die Gleichung in einer impliziten Weise gegeben ist; dh. die Abhängigkeit zwischen x, y und y' wird durch eine Gleichung

$$F(x, y, y') = 0$$

beschrieben. Kann diese Beziehung explizit nach y' aufgelöst werden, so handelt es sich um die bereits bekannte Darstellung der Dgl. Es kann nun aber so sein, daß die vorstehende Gleichung zB nach x oder nach y viel einfacher aufgelöst werden kann als nach y' – dann gibt es parametrische Methoden zur Lösung solcher Gleichungen

<u>Beispiel:</u> $y y'^2 + x y'^3 = 1$,

kann nicht explizit nach y' aufgelöst werden. Welche Lösungen hat diese Dgl?

<u>Bemerkung:</u> Wichtig zu wissen ist, daß implizit gegebene Differentialgleichungen, welche keine globale, eindeutige Auflösung nach y' besitzen – dh welche also nicht äquivalent zu einer expliziten Gleichung der Form $y' = f(x, y)$ sind, im allgemeinen mehrere verschiedene Lösungen haben können; dazu folgende

Beispiele: (1) Die Dgl $y'(y'+x)=0$ ist offenbar gleichwertig zu den beiden Gleichungen

$$y'=0 \quad \text{oder} \quad y'+x=0,$$

die ihrerseits die allgemeinen Lösungen $y_1=c$ oder $y_2=-\frac{1}{2}x^2+a$ mit $a,c\in\mathbb{R}$ besitzen.

(2) Die Dgl $(y'+1)\sin(y'+2y)\cdot\cos(y'^2+x)(y-\sin x)=0$ hat folgende Lösungen

$$y'+1=0 \iff y=-x+c$$

$$\sin(y'+2y)=0 \iff y'+2y=k\pi \iff y=\frac{k\pi}{2}+ce^{-2x}$$

$$\cos(y'^2+x)=0 \iff y'^2=\frac{2k+1}{2}\pi-x \iff$$

$$y'=\sqrt{\frac{2k+1}{2}\pi-x} \quad \text{oder} \quad y'=-\sqrt{\frac{2k+1}{2}\pi-x}$$

$$\iff y=-\frac{2}{3}\left(\frac{2k+1}{2}\pi-x\right)^{3/2}+c \quad \text{oder} \quad y=\frac{2}{3}\left(\frac{2k+1}{2}\pi-x\right)^{3/2}+c$$

$$y=\sin x.$$

Hier sieht man besonders eindringlich, daß völlig unterschiedliche Typen von Lösungen entstehen können. Dies hängt offenbar damit zusammen, wie die Nullstellenmenge der Funktion

$$F(x,y,y')=0$$

strukturiert ist. Im Falle der global eindeutigen Auflösbarkeit von F nach y' ist die Gleichung $F=0$ äquivalent zu

$$y'-f(x,y)=0,$$

was auf eine einzige explizite Gleichung führt.

Wir gehen nun auf einige Fälle ein:

Methode A Nullstellen-Faktorisierungsverfahren

Beispiel: Polynomiale Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$F(x,y,y') = (y')^m + P_1(x,y)(y')^{m-1} + \dots + P_{m-1}(x,y)\,y' + P_m(x,y) = 0$$

mit Funktionen $P_1(x,y), \dots, P_m(x,y)$ heißt in y' Polynomiale Dgl. 1. Ordnung vom Grad m. In der Variablen $p := \frac{dy}{dx} = y'$ ist dies also ein Polynom m-ten Grades. Hat nun dieses Polynom m Wurzeln, so ist

$$F(x,y,p) = (p - p_1(x,y)) \cdots (p - p_m(x,y))$$

eine Faktorisierung von F mit gewissen Funktionen $p_i(x,y)$. Lösungen der Dgl $F = 0$ sind demnach alle allgemeinen Lösungen der expliziten Gleichungen

$$y' = p_i(x,y) \quad , i = 1, \dots, m.$$

Darüberhinaus gilt: Ist $F_i(x,y_i) = c_i$ die allgemeine Lösung von

$$y' = p_i(x,y)$$

in impliziter Darstellung (mit $c_i \in \mathbb{R}$), so ist

$$\Phi(x,y) := (F_1(x,y) - c)(F_2(x,y) - c) \cdots (F_m(x,y) - c) = 0$$

die allgemeine implizite Darstellung der Lösungen von $F = 0$. Die Tatsache, daß in den Faktoren stets das gleiche $c \in \mathbb{R}$ auftritt, ist völlig unerheblich: Denn ist $\Phi = 0$, so ist $F_j(x,y) = c$ für irgendein $j \in \{1, \dots, m\}$ und c ist eine willkürliche Parameterkonstante.

Beispiel: $y'^2 - (x+y^2)y' + xy^2 = 0$.

[illegible] $(p^2 - (x+y^2)p + xy^2 = 0)$ hat die Lösungen:

$$p_{1,2} = \frac{x+y^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{x+y^2}{2}\right)^2 - xy^2}$$

$$= \frac{x+y^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{x^2+2xy^2+y^4-4xy^2} = \frac{x+y^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(x-y^2)^2}$$

$$= x \text{ oder } y^2$$

$\Rightarrow F(x,y,p) = (p-x)(p-y^2)$; so daß wir die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = x \quad \text{mit der allg. Lösung} \quad y(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \quad \text{mit der allg. Lösung} \quad y(x) = \frac{-1}{x+c}$$

erhalten. Dann erhält man durch Auflösen nach c die impliziten Darstellungen

$$F_1(x,y) = y - \frac{1}{2}x^2 \quad \text{und} \quad F_2(x,y) = -\frac{1}{y} - x$$

$$\Rightarrow \Phi(x,y) = \left(y - \frac{1}{2}x^2 - c\right)\left(\frac{1}{y} + x - c\right) = 0$$

ist die globale allgemeine implizite Form der Lösung der Dgl.

Wie die weiter vorstehenden Beispiele zeigen, ist das Nullstellen-Faktorisierungsverfahren auch für nicht-polynomiale Gleichungen (in p) anwendbar

Beispiel: Die Dgl $\cos(p-x)\ln(xe^p - y) = 0 \quad (p = y')$ führt auf die beiden Gleichungen

$$y' = x + \frac{2k+1}{2}\pi, \text{ also } y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2k+1}{2}\pi x + c$$

$$xe^{y'} - y = 1, \text{ also } y' = \ln\left(\frac{1+y}{x}\right)$$

Mit $\tilde{y} = 1+y$, also $y' = \tilde{y}'$ folgt $\tilde{y}' = \ln\left(\frac{\tilde{y}}{x}\right)$, und mit $u = \frac{\tilde{y}}{x}$ ist dies eine separierbare Gl.

Methode B Parameterverfahren

Dieses im folgenden beschriebene Verfahren wendet man vor allem bei impliziten Gleichungen an, in denen entweder x oder y nicht explizit auftritt: $F(x,y,y') = 0$

Typ A $\boxed{F(x,y,y') = F(y')}$, dh. x und y treten nicht explizit auf

Vorgehensweise: Suche Nullstellen von F. Ist etwa $F(\lambda) = 0$, so ist offenbar

$$y(x) = \lambda x + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

eine Lösung der Dgl.

Beispiel: Die Dgl $y'^2 - 1 = 0$ hat die beiden Lösungen

$$y_1 = x + c \text{ und } y_2 = -x + c$$

Typ B: $\boxed{F(x,y,y') = F(x,y')}$; dh. y tritt nicht explizit auf.

1. Fall: Die Gleichung $F(x,y') = 0$ kann explizit nach $p = y'$ aufgelöst werden:

$$y' = h(x) \Rightarrow y = \int^x h(t)\,dt.$$

2. Fall: Es kann auch sein, daß die Gleichung $F(x,y') = 0$ nur schwerlich nach y' aufgelöst werden kann – jedoch sei die Auflösung nach x bequemer, z.B.

$$x e^{y'} - y' - 1 = 0 \Rightarrow x = x(p) = \frac{1+p}{e^p}$$

Satz: Die Dgl $F(x,y') = 0$ sei nach x auflösbar, also sei $F(x,p) = 0$ falls $x = g(p)$ ist. Dann ist

$$y(x) = c + \int^{g^{-1}(x) = p} t\, g'(t)\,dt \quad , c \in \mathbb{R}$$

eine Lösung der Differentialgleichung.

Beweis: Die Formel resultiert aus einer abstrakten Rechnung:

$$x = g(y') \Rightarrow y' = g^{-1}(x) \Rightarrow y(x) = \int^{x} g^{-1}(s)\,ds + C$$

Setzt man $t = g^{-1}(s)$, so ist $s = g(t)$, $ds = g'(t)dt$, dann ist

$$y(x) = \int^{g^{-1}(x)} t\,g'(t)\,dt \quad , \text{ wie angegeben.}$$

Bemerkung:

(1) Beachte, daß im Integrand der Lösung $y(x)$ nur die explizite Funktion g auftritt – würde man g^{-1} explizit kennen, so wäre die Dgl ohnehin formal mit

$$y'(x) = g^{-1}(x)$$

als reine Integration gelöst. Da wir somit annehmen, g^{-1} nicht explizit angeben zu können, scheint die Formel für y wertlos, da ja $g^{-1}(x)$ als Integralgrenze auftritt. Hier hilft folgende Betrachtung

(2) Die Variable x ist mittels der Auflösung von $F(x,p)$ parameterabhängig von p, wie gesehen

$$x = x(p) = g(p)$$

Dann ist auch letztlich $y = y(x)$ von p abhängig, nämlich

$$y = y(x(p)) = C + \int^{p} t\,g'(t)\,dt\,;$$

$\Rightarrow$ $(x(p), y(p))$ mit $p \in$ geeignetes Intervall ist offenbar eine Parameterbeschreibung der Lösung; es ist $F(x(p), y(p)) \equiv C$

Es kann sogar sein, daß aus $x = x(p)$ und $y = y(p)$ der Parameter p eliminiert werden kann, sodaß man aus dieser Param erhält.

Beispiel: $F(x, y') := y'^3 + y' - x = 0$.

Hier ist die Auflösung nach y' zwar nicht grundsätzlich (Gleichung 3. Grades!) aber doch sehr umständlich möglich. Dagegen ist die Auflösung nach x trivial:

$$x = g(y') = y'^3 + y' \quad , \quad \text{also} \quad x = x(p) = g(p) = p^3 + p .$$

$$y(p) = c + \int^p t\, g'(t)\, dt = c + \int^p t\,(3t^2 + 1)\, dt$$

$$= c + \tfrac{3}{4} p^4 + \tfrac{1}{2} p^2$$

Aus der $y(p)$-Gleichung läßt sich p als Lösung einer biquadratischen Gleichung eliminieren,

$$p_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\tfrac{1}{3} \pm \sqrt{\tfrac{4}{3}(y-c) + \tfrac{1}{9}}} = y'$$

Setzt man diese p in den $x(p)$-Ausdruck, so erhält man die $x(y)$-Abhängigkeit

$$x(y) = \pm \left[\tfrac{1}{3} \pm \sqrt{\tfrac{4}{3}(y-c) + \tfrac{1}{9}} \right]^{3/2} + \pm \left[\tfrac{1}{3} \pm \sqrt{\tfrac{4}{3}(y-c) + \tfrac{1}{9}} \right]^{1/2} .$$

Typ C: $\boxed{F(x,y,y') = F(y,y')}$, dh., x tritt nicht explizit auf.

1. Fall: Die Gleichung $F(y,y') = 0$ kann explizit nach y' aufgelöst werden:

$$y' = V(y) \Rightarrow \int^y \frac{dy}{V(y)} = x + c ,$$

woraus die implizite Abhängigkeit zwischen ~~y~~ und x folgt.

2. Fall: Es kann nun sein, daß die Gleichung $F(y,y') = 0$ nicht – oder nur sehr schwer – nach y' aufgelöst werden kann.

Wir nehmen jedoch an, daß die Auflösung nach y dagegen durchführbar ist,

$$y = y(y') = f(y'),$$

wie z.B. in der Dgl

$$0 = F(y,y') = e^y - y' + \ln y' \text{ , also } y = \ln(y' - \ln y')$$

<u>Satz:</u> Die Dgl $F(y,y') = 0$ sei nach y auflösbar, dh.

$y = f(y') \Rightarrow F(y,y') = 0$. Setzen wir $p = y'$, dann ist

$$x(p) := c + \int^p \frac{f'(t)}{t}\,dt \text{ ;}$$

Somit ist $p \longmapsto (x(p), y(p))$ eine Parametrisierung einer Kurve in $\mathbb{R}^2$, welche die Dgl $F(y,y') = 0$ löst.

Beweis: Wir haben $y = f(y') \Leftrightarrow y' = f^{-1}(y)$. Dies ist offenbar eine separierte Dgl mit der Lösung

$$\int^y \frac{ds}{f^{-1}(s)} = \int^x 1\,dx = x + c$$

Mit $t = f^{-1}(s)$, also $s = f(t)$, $ds = f'(t)\,dt$ folgt

$$x = \int^{f^{-1}(y)} \frac{f'(t)\,dt}{t} + c = \int^p \frac{f'(t)}{t}\,dt + c \text{ .}$$

Der Integrand ist demnach ein bekannter Ausdruck.

<u>Beispiel:</u> $F(y,y') = y - y'^3 - y'$. Dann ist $y(p) = p^3 + p = f(p)$,

$$x(p) = \int^{p} \frac{3t^2+1}{t}\,dt = \frac{3}{2}p^2 + \ln p + c\,;$$

somit ist $p \mapsto \left(\frac{3}{2}p^2 + \ln p + c\,,\ p^3 + p\right) \in \mathbb{R}^2$ die Parametrisierung einer Lösungskurve (aus welcher sich der Parameter p leider nicht eliminieren läßt, sodaß es bei dieser Parameter-Darstellung bleibt.

Methode C Differentiationsverfahren.

Wir betrachten eine allgemeine Differentialgleichung 1. Ordnung,

$$F(x, y, y') = 0$$

Kann diese Gleichung explizit nach y' aufgelöst werden, so haben wir die Gleichungsform(en) $y' = f(x,y)$. Ist diese Auflösung nun nicht möglich, so kann es eben doch sein, daß man nach x oder nach y auflösen kann, d.h.

$$x = g(y, y') \implies F(x,y,y') = 0$$

$$y = f(x, y') \implies F(x,y,y') = 0$$

Die Differentiationsmethode besteht nun darin, die explizite Gleichung (für x oder für y) zu differenzieren, wodurch eine neue Differentialgleichung entsteht – und zwar eine solche zwischen jeweils anderen Variablen.

Typ: $\boxed{y = f(x,y').}$ Wir differenzieren diese Gleichung nach x und erhalten mit $p := y'$

$$y' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{dy'}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'}\,y''$$

Dies ist eine Differentialgleichung für $p = p(x)$, die Variable y ist durch das Ableiten "verschwinden" — ein echter Trick. Ist nun $p = p(x)$ eine Lösung dieser Dgl, so erhält man $y(x)$ durch Integration von p — weil ja schließlich $p(x) = y'(x)$ ist, raffiniert.

<u>Beispiel:</u> (<u>Clairaut'sche Differentialgleichung</u>). Diese lautet

$$y - y'x = h(y')$$

mit einer differenzierbaren Funktion h — also z.B. $y - y'x = y'^3$. Durch Differenzieren der Gleichung finden wir (mit $p = y'$)

$$p - p - p'x = h'(p) \cdot p'$$

$$\Leftrightarrow \quad p'\{h'(p) + x\} = 0 \quad \Leftrightarrow p' = 0 \text{ oder } x = -h'(p).$$

Im ersten Fall ($p' = 0$) ist $p =: m = \text{const} \Leftrightarrow y' = m \Leftrightarrow y = mx + b$
Aus der Ausgangsdifferentialgleichung folgt nun $b = h(m)$

$$\Rightarrow \quad y = mx + h(m) \quad \text{ist eine Lösung der Dgl.}$$

Hierbei kann also $m \in$ Definitionsbereich von h beliebig wählbar.
Im zweiten Fall haben wir

$$x = -h'(p),$$

und dies ist eine implizite Dgl vom Typ B. Für den Fall, daß $h' = \text{const} = a$ ist, ist auch $h(y') = ay' + c$, so daß die Ausgangsdifferentialgleichung die einfache lineare Struktur

$$y'(a + x) - y = c$$

Ist dagegen $h' \neq \text{const}$, so nehmen wir o.E. an, daß h' lokal invertierbar ist. Setzen wir dann die (oder irgendeine) Umkehrung

$$p = (h')^{-1}(-x) \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} y = \int h'^{-1}(x)\,dx \quad (\text{fertig})$$

(b) in die Clairaut-Dgl ein, so erhalten wir die Lösung

$$\boxed{y(x) = x(h')^{-1}(-x) + h((h')^{-1}(-x))}$$

<u>Resumée:</u> Für die Clairaut'sche Differentialgleichung

$$y - xy' = h(y')$$

ist die Geradenfamilie

$$y = mx + h(m) \quad \text{mit } m \in \mathbb{R} \cap \mathrm{Def}(h)$$

ein Teil der Lösungsmenge. Ist darüberhinaus

a) h linear (also $h' = \text{const}$), so ist dies auch schon die Gesamtheit aller Lösungen

b) h' (in einem Intervall I) monoton, so ist $y(x)$ gemäß vorstehender Formel ebenfalls eine Lösung (eine sog. singuläre Lösung); zusammen mit der Geradenschar ist dies die Lösungsgesamtheit.

c) Hat die Gleichung $x = -h'(p)$ für p mehrere Lösungen, so gibt es gemäß vorstehender Formel entsprechend viele singuläre Lösungen.

<u>Beispiel:</u> Clairaut-Gleichung $y - y'x = e^{2y'}$.

Die Geradenschar

$$y = mx + e^{2m} \quad (\text{mit } m \in \mathbb{R})$$

sowie

$$y(x) = \frac{x}{2}\ln\left(-\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} \quad (x < 0), \text{ singuläre Lösg}$$

[illegible] (hier $h(t) = e^{2t}$, $h'^{-1}(z) = \frac{1}{2}\ln\frac{z}{2}$

Beispiel (Bernoulli - d'Alembert - Gleichung)

$$y = x\,g(y') + h(y');$$

für $g(p) = p$ ist dies die Clairaut-Gleichung. Ableiten führt auf

$$p = g(p) + x g'(p) p' + h'(p) p'$$

$$\Leftrightarrow \quad p - g(p) = p'\,(x g'(p) + h'(p))$$

$$\Leftrightarrow \quad (p - g(p))\,dx = dp\,(x g'(p) + h'(p)) \qquad \text{(Differentialschreibweise).}$$

a) Ist nun $g(p) \neq p$, so betrachten wir x als Funktion von p und erhalten somit die Dgl

$$\frac{dx}{dp} = \frac{x g'(p) + h'(p)}{p - g(p)} = \frac{g'(p)}{p - g(p)}\,x + \frac{h'(p)}{p - g(p)}$$

Dies ist eine inhomogene lineare Dgl für x, welche vollständig gelöst werden kann. Die Lösung der ursprünglichen Gleichung kann so gewonnen werden.

a) Aus $x = x(p)$ ermittle die Inverse, $p = p(x) = y'(x)$ und bilde eine Stammfunktion; da diese nur modulo additiver Konstanten eindeutig ist, bestimme letztere durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung.

b) $x(p)$ hat als Lösung einer inhomogenen linearen Dgl die Struktur

$$x(p) = K\varphi(p) + \psi(p) \qquad \text{mit } K \in \mathbb{R}$$

(ψ ist spezielle - und φ Lösung der homogenen Gleichung). Setze dies in die Ausgangsgleichung ein, also

$$y(p) = x(p)\,g(p) + h(p)$$

womit eine Parametrisierung $p \longmapsto (x(p), y(p))$ einer Lösungskurve der Dgl gewonnen ist.

b) Sind $p_1, \dots, p_n$ Nullstellen von $p - g(p)$, so ist dort $p' = 0$; man erhält die singulären Lösungen (isolierte Geraden)

$$y(x) = x\,g(p_j) + h(p_j) \qquad (j = 1, \dots, n)$$

<u>Beispiel:</u> $y = 2y'x - y'^2$ ergibt differenziert
$p = 2p + 2(x - p)p'$.

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} = 2 - \frac{2x}{p} \qquad (\text{wo } p \neq 0 \text{ ist})$$

$$\Rightarrow \quad x(p) = \frac{C}{p^2} + \frac{2}{3}p.$$

Für $p = 0$ ist $p' = 0$ und hieraus folgt $y \equiv 0$.

Wir gehen nun noch auf den Typ $\boxed{x = f(y, y')}$ ein:
Differenzieren (nach x) führt (mit $p = y'$) auf

$$1 = f_y(y,p)\,p + f_p(y,p)\,p'.$$

Dies kann als Differentialgleichung 2. Ordnung (für y) angesehen werden. Wir können jedoch auch den Kniff anwenden:
Man differenziert die Bilanzgleichung

$$x - f(y, y') \equiv 0$$

nach y. Dann erhalten wir wegen $\frac{dx}{dy} = 1/p$

$$\frac{1}{p} - f_y - f_p \cdot \frac{dp}{dy} = 0$$

Dies ist eine gewöhnliche Dgl zwischen p und y. Hat man die Lösung,

$$p = p(y),$$

so stellt dies wegen $p = y'(x)$ eine separierte Gleichung für $y(x)$ dar

Beispiel: $y'^2 + 2xy' - y = 0$. Diese Gleichung ist sowohl nach y als auch nach x auflösbar. Wir demonstrieren die beiden Methoden

a) y-Auflösung: $y = p^2 + 2xp$

$$\Rightarrow \quad p = 2p\frac{dp}{dx} + 2x\frac{dp}{dx} + 2p$$

$$\Rightarrow \quad -p = 2(p+x)p'$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(p+x)dp + p\,dx = 0 \qquad \text{(Differentialform-Schreibweise)}$$

Die Dgl wird bei Multiplikation mit dem integrierenden Faktor p exakt, also

$$2(p^2+xp)\,dp + p^2 dx = 0 \qquad \text{(exakt)}$$

Lösung:

$$F(x,p) = \int p^2 dx + C(p) = p^2 x + C(p)$$

$$F(x,p) = \int 2(p^2+xp)\,dp + D(x) = \tfrac{2}{3}p^3 + xp^2 + D(x)$$

$$\Rightarrow C(p) = \tfrac{2}{3}p^3 + c \text{ und } D(x) = -c$$

$$\Rightarrow F(x,p) = xp^2 + \tfrac{2}{3}p^3 + c \quad \text{ist Lösung der } p-x\text{-Gleichung}$$

Auflösung nach p schwierig ($\Rightarrow p = p(x) = y'(x)$ und Integration)

b) x - Auflösung: $x = \frac{y - p^2}{2p} = \frac{y}{2p} - p/2$.

Differentiert nach y ergibt dies die Gleichung

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2p} + \frac{dp}{dy}\left\{-\frac{y}{2p^2} - \frac{1}{2}\right\},$$

welche - mit $2p^2$ multipliziert - sogar exakt ist

$$p\,dy + dp\{y + p^2\} = 0$$

$$F(y,p) = \int p\,dy + C(p) = py + C(p)$$

$$F(y,p) = \int (y + p^2)\,dp + D(y) = py + \tfrac{1}{3}p^3 + D(y)$$

$$\Rightarrow C(p) = \tfrac{1}{3}p^3 + c \quad \text{und} \quad D(y) = -c$$

$$\Rightarrow F(y,p) = py + \tfrac{1}{3}p^3 + c = \text{const} \quad (\text{implizite Lösung}$$

Hier ist ebenfalls die Auflösung nach p sehr kompliziert, so daß auch jetzt die explizite Beschreibung der Lösung ausbleibt. Jedoch gewinnt man (bei a) und b)) eine über p parametrisierte Lösungskurve: Aus $F(y,p) = \text{const}$ folgt.

$$y(p) = \frac{c}{p} - \frac{1}{3}p^2$$

$$x(p) = \frac{c}{2p^2} - \frac{1}{6}p - p/2 = \frac{c}{2p^2} - \frac{2}{3}p\,.$$

Beispiel: $4yy'^2 + 2xy' - y = 0$ ergibt nach x aufgelöst (falls p

$$x = y\frac{(1 - 4y'^2)}{2y'} = y\frac{(1 - 4p^2)}{2p}\,.$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1-4p^2}{2p} + y \cdot \frac{dp}{dy} \left\{ -\frac{1}{2p^2} - 2 \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2p} + 2p\right) dy + dp \left\{ \frac{y}{2p^2} + 2y \right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2p} + 2p\right) dy + \frac{y}{p}\, dp \left\{ \frac{1}{2p} + 2p \right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad p\, dy + y\, dp = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dp}{dy} = -\frac{p}{y} \Leftrightarrow p(y) = \frac{c}{y} \quad , \; c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad y'(x) = \frac{c}{y(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} y^2(x) = cx + d$$

$\Leftrightarrow \quad y^2 = cx + d$. Wir testen nun, für welche Konstanten dies auch eine Lösung der Ausgangsgleichung ist und finden durch Einsetzen.

$y^2 = cx + d$ löst die Dgl $\Rightarrow d = c^2$, also

$y^2 = cx + c^2$ ist die Lösungsschar der Dgl

(welche auch den Fall $y = 0 \Leftrightarrow p = 0$ beinhaltet).

§9 Die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Wir betrachten folgende Differentialgleichung: Gesucht ist eine Funktion $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche die Gleichung

$$L(y) := y''(t) + a y'(t) + b\, y(t) = h(t)$$

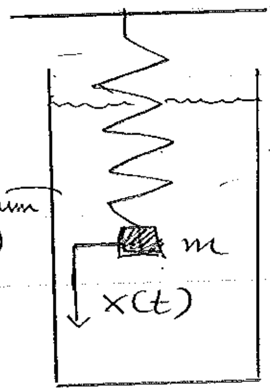
mit gegebenen $a, b \in \mathbb{R}$ (konstante Koeffizienten) und gegebener (stetigen) Funktion $h(t)$. Daß wir "t" statt "x" schreiben, resultiert von der Bedeutung dieser Dgl in der Anwendung: Die Variable stellt zumeist die Zeit dar.

Die Bedeutung dieser Differentialgleichung ist enorm: Sie dient beinahe als Modell für zahlreiche elementar-physikalische Vorgänge

① Mechanische Schwingung:
Ist $x(t)$ der Weg, dann ist $\dot{x}(t)$ die Geschwindigkeit und $\ddot{x}(t)$ die Beschleunigung. Für ein mechanisches Schwingungssystem (mit geschwindigkeitsproportionaler Reibung) ist dann die Kräfte-Bilanz

$$\underbrace{m\ddot{x}}_{\text{Trägheits-}} + \underbrace{a\dot{x}}_{\text{Reibung-}} + \underbrace{cx}_{\text{Rückstell Kraft}} = \sum \text{äußere Kräfte}$$

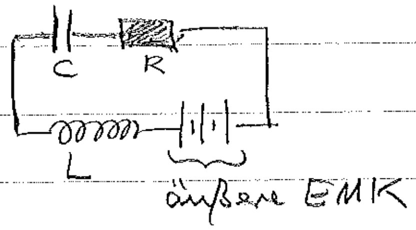
Medium (Öl)



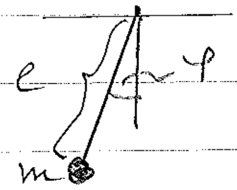
② Wechselstromkreis:
Für den Fall eines Stromkreises mit Ohm'schem Widerstand (R), Spule (Selbstinduktion L)

und Kapazität (C) ergibt die Spannungs-Bilanz die Gleichung für den Strom $I = I(t)$

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C} I = \sum \text{äußeren Spannungen}/\text{Zeit}$$



③ Pendelschwingung:
Völlig analog zur Federschwingung findet man über die Drehmoment-Bilanz zunächst die Gleichung



$$ml\ddot{\varphi} + mg\sin\varphi = 0$$

Greifen äußere Drehmomente an und liegt noch eine geschwindigkeitsproportionale Reibung vor, so erhält man im Falle kleiner Auslenkungen φ (wegen $\sin\varphi \approx \varphi$) die lineare Dgl

$$\underbrace{ml\ddot{\varphi}}_{\text{Trägheits-}} + \underbrace{a\dot{\varphi}}_{\text{Reibungs-}} + \underbrace{mg\varphi}_{\text{Rückstell-}} = \sum \text{äußere Drehmomente}$$

Term.

<u>Bemerkung</u>: Nach dem Struktursatz für lineare Differentialgleichung (§1) ergibt sich die Aufspaltung des Problems in "homogen" und inhomogen". Man hat also den Raum

$$V_0 = \{y \mid L(y) = 0\}$$

zunächst zu berechnen (also die Gesamtheit der Lösungen der entsprechenden homogenen Dgl), und dann reicht es, anschließend irgendeine spezielle Lösung zu ermitteln. Hierzu gibt es verschieden Methoden.

Theorem I (Homogene lineare Dgl 2. Ordnung)

(i) Der Lösungsraum V_0 der Differentialgleichung

$$L(y) = y'' + ay' + by = 0$$

ist 2-dimensional. Das heißt: Es gibt zwei Lösungen y_1 und y_2, welche nicht Vielfache voneinander sind, sodaß, die allgemeine Lösung d. hom. Gl. $y \in V_0$ durch

$$y(t) = A\,y_1(t) + B\,y_2(t) \quad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}$$

gegeben ist. Sind umgekehrt y_1 und y_2 irgendwelche Lösungen von $L(y) = 0$ und gilt nicht $y_1 = \alpha y_2$ oder umgekehrt, so ist

$$V_0 = \{ Ay_1 + By_2 \mid A, B \in \mathbb{R} \}$$

ii) Das Anfangswertproblem

$$L(y) = 0 \quad \text{und} \quad \begin{cases} y(t_0) = c_0 \\ y'(t_0) = c_1 \end{cases}$$

(für einen fixierten Zeitpunkt t_0) ist stets eindeutig lösbar.

Zusatz: Man erhält übrigens eine bequeme Basis von V_0 dadurch daß man y_1 und $y_2 \in V_0$ mit den Anf. Bed

$$(c_0, c_1) = (1, 0) \quad \text{bzw.} = (0, 1) \text{ bestimmt.}$$

In diesem Fall ist offenbar $y = Ay_1 + By_2$ Lösung des Anfangswertproblem zu den Daten (A, B).

iii) Die Dgl $L(y) = 0$ wird durch den Lösungsansatz

$$y(t) = e^{\lambda t} \quad \text{mit einem } \lambda \in \mathbb{C}$$

vollständig gelöst. Genauer gilt: Der Ansatz $e^{\lambda t}$ führt die Dgl in eine quadratische Gleichung über und deren Lösungen bestimmen diejenigen der Ausgangsgleichung.

$$\boxed{\begin{aligned} & y'' + ay' + by = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \end{aligned}}$$ (Charakteristische Gleichung)

Sind dann λ_1 und λ_2 die Lösungen dieser charakteristische Gleichung, so lautet die allgemeine Lösung explizit:

Fall 1 λ_1, λ_2 verschieden, reell

$$\Rightarrow y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \qquad (A, B \in \mathbb{R})$$

Fall 2 $\lambda_1 = \lambda_2$ (reell)

$$\Rightarrow y(t) = e^{\lambda_1 t}\{A + Bt\} \qquad (A, B \in \mathbb{R})$$

Fall 3 λ_1, λ_2 verschieden, komplex (also wegen $a, b \in \mathbb{R}$ sind λ_1 und λ_2 konjugiert komplex, $\lambda = \alpha \pm i\omega$

$$y(t) = e^{\alpha t}\{A\cos\omega t + B\sin\omega t\} \qquad (A, B \in \mathbb{R})$$

Herleitung: Wir übergehen i) und ii) und berechnen iii):
Aus $y(t) := e^{\lambda t}$ folgen $y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$ und $y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$. Setzt man dies in die Dgl ein, so folgt nach Kürzen durch $e^{\lambda t}$ $(\neq 0)$ die quadratische Gleichung für λ mit der Lösung

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

a) Ist nun $(\frac{a^2}{4} - b) > 0$, so liegt Fall 1 vor; die beiden

Funktionen $e^{\lambda_1 t}$ und $e^{\lambda_2 t}$ sind nicht konstante Vielfache voneinander; somit stellt sich jede Lösung von $L(y)=0$ als Linear-Kombination dieser beiden "Fundamentallösungen" dar

Übrigens: Man kann leicht eine hyperbolische Darstellung finden: Es ist mit $\alpha = -a/2$ offenbar

$$\lambda_1 = \alpha + \beta \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \alpha - \beta$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = e^{\lambda_1 t} \pm e^{\lambda_2 t} = e^{\alpha t}\{e^{\beta t} \pm e^{-\beta t}\}$$

sind Lösungen, die man auch so schreiben kann

$$y_1(t) := e^{\alpha t}\cosh(\beta t), \quad y_2(t) := e^{\alpha t}\sinh(\beta t)$$

und die allgemeine Lösung $y \in V_0$ schreibt sich dann

$$y \in V_0 \Longleftrightarrow y(t) = e^{\alpha t}\{A\cosh\beta t + B\sinh\beta t\},\ A,B \in \mathbb{R}$$

b) Ist dagegen $\frac{a^2}{4} - b = 0$, so liegt Fall 1 vor; $\lambda_1 = \lambda_2 = -$
Man rechnet nun nach, daß dann auch

$$y(t) := te^{-a/2\, t} = ty_0 \quad (\text{mit } L(y_0) = 0)$$

eine Lösung der homogenen Gleichung ist (welche nicht konstantes Vielfache von $e^{(-a/2)t}$ ist).

c) Schließlich haben wir mit $\frac{a^2}{4} - b < 0$ den konjugiert-komplexen Fall vorliegen; $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$ mit $\omega = \sqrt{\left|\frac{a^2}{4} - b\right|}$.

Nun ist $e^{(\alpha \pm i\omega)t} = e^{\alpha t}\{\cos\omega t \pm i\sin\omega t\} = y(t)$

Da nun die Differentialgleichung "reell" ist, gilt offenbar

$$L(y) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\{L(y)\} = 0 \text{ und } \mathrm{Im}\{L(y)\} = 0$$

$$\Leftrightarrow L(\mathrm{Re}(y)) = 0 \text{ und } L(\mathrm{Im}(y)) = 0.$$

Das heißt, daß $e^{\alpha t}\cos\omega t$ und $e^{\alpha t}\sin\omega t$ zwei Fundamentallösungen sind, welche alle anderen erzeugen.

<u>Beispiele</u> ① $y'' + y' - 2y = 0$. Die charakteristische Gleichung lautet:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{3}{2} \Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2$$

$\Rightarrow y(t) = Ae^{t} + Be^{-2t}$ ist die allgemeine Lösung.

② $y'' - 2y' + y = 0$. Die charakteristische Gleichung lautet:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm 0$$

$\Rightarrow y(t) = e^{t}\{A + Bt\}$ ist die allgemeine Lösung.

③ $y'' + 6y' + 13y = 0$. Die charakteristische Gleichung lautet:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{-13+9} = -3 \pm 2i$$

$\Rightarrow y(t) = e^{-3t}\{A\cos 2t + B\sin 2t\}$ ist die allgemeine Lösung

④ $y'' + \omega^2 y = 0$. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega$$

$\Rightarrow y(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ ist die allgemeine Lösung.

Dies ist demnach eine ungedämpfte harmonische Schwingung. Sie läßt sich auch in der Schreibweise mit verschobener Phase angeben:

<u>Bemerkung:</u> Die allgemeine Lösung des "Schwingfalls",

$$y(t) = e^{\alpha t}\{A\cos\omega t + B\sin\omega t\} \quad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}$$

läßt sich auch umformen in:

$$\boxed{y(t) = K e^{\alpha t}\cos(\omega t - \varphi)} \quad \text{mit } K \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq \varphi < \pi$$

Beweis: Vgl. Kap IV §6 (setze dort $\sin\omega t = \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$).
Wir rechnen jedoch in diesem Fall kürzer so:

$$A\cos\omega t + B\sin\omega t = K\cos(\omega t - \varphi)$$

Setzt man $t = 0$, so folgt hieraus $K\cdot\cos(-\varphi) = K\cos\varphi = A$.
Setzt man $t = \pi/2\omega$, so folgt $B = K\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = K\sin\varphi$.
Also haben wir

$$K\cos\varphi = A \quad \text{und} \quad K\sin\varphi = B$$

$\Leftrightarrow$ $\operatorname{tg}\varphi = B/A$ und $K^2 = A^2 + B^2$, und die obige Darstellung ist gewonnen. Die Parameter $\{A, B\}$ stehen mit den Parametern $\{K, \varphi\}$ in eindeutigem Zusammenhang.

Die "Phasenverschobene Darstellung" eignet sich besonders dann, wenn ein Anfangswertproblem vorliegt, bei dem der Anfangswert t_0 ein krummer Wert ($\neq 0$, $\neq \pi/2\omega$), eine der Anfangsdaten c_0 oder c_1 aber gleich 0 ist.

<u>Beispiel:</u> Gesucht ist $y(t)$ mit $y'' + 4y' + 7y = 0$ mit der Anfangsbedingung $y(\pi/3) = 1$ und $y'(\pi/3) = 0$. Die allgemeine Lösung ist dann wegen $\lambda_{1,2} = -2 \pm i\sqrt{3}$

$$y = K e^{-2t}\cos(\sqrt{3}t - \alpha), \quad \text{also } y'(t) = -\sqrt{3}K e^{-2t}\sin(\sqrt{3}t - \alpha) + \ldots$$

Da $K \neq 0$ ist, muß dann $\sin(\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3} - \alpha) = 0$, also $\alpha = \frac{\pi}{3}\sqrt{3}$ sein.

Dann ist $\cos(\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3}-\alpha)=\cos(0)=1$ und wir erhalten $K=e^{2\pi/3}$.

Beispiel: Das Anfangswertproblem ist zu lösen:

$$y''-y'-2y=0 \qquad y(0)=2,\ y'(0)=-1.$$

Die quadratische Gleichung $\lambda^2-\lambda-2=0$ hat die Lösungen $\lambda_1=1, \lambda_2=2$, sodaß die allgemeine Lösung lautet

$$y(t)=Ae^{t}+Be^{2t},$$

woraus $y'(t)=Ae^t+2Be^{2t}$ folgt. Für $t=0$ erhalten wir das Gleichungssystem

$$A+B=2 \quad \text{und} \quad A+2B=-1,$$

welches die eindeutige Lösung $A=5$ und $B=-3$ besitzt. Die Funk

$$y(t)=5e^{t}-3e^{2t}$$

ist daher die eindeutige Lösung der Dgl samt Anfangsbedingung.

<u>Theorem II</u> (Inhomogene Dgl 2. Ordnung). Für stetiges h hat die Differentialgleichung

$$L(y)=y''+ay'+by=h$$

immer einen 2 dimensionalen affinen Lösungsraum;

$$V_h=\{y \mid L(y)=h\}=V_0+\{y_{sp}\},$$

wobei y_{sp} eine beliebige "spezielle" Lösung der Dgl $L(y)=h$.
Es gibt mehrere Methoden, eine solche spezielle Lösung zu finc und jede solche Methode hat eigene Vor- und Nachteile:

Methode 1 (Methode des Faltungsintegrals, oder auch sogenanntes Grundlösungsverfahren). Hierzu geht man so vor:

1. Schritt: Bestimme die (eindeutige) Lösung des homogenen Anfangswertproblems (mit fixiertem $t_0 \in \mathbb{R}$)

$$L(y) = 0 \quad \text{und} \quad y(t_0) = 0, \; y'(t_0) = 1.$$

2. Schritt: Sei y_0 diese Lösung. Dann ist

$$y_{sp}(t) = \int_{t_0}^{t} y_0(t + t_0 - x)\, h(x)\, dx$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $L(y) = h$

Methode 2 (Variation der Konstanten). Sind y_1 und y_2 zwei beliebige (nicht-proportionale) Lösungen der homogenen Gleichung, sodaß also $y(t) = A\,y_1(t) + B\,y_2(t)$ die allgemeine Lösung ist, dann setzt man – in völliger Analogie zum Fall der linearen Dgl'n 1. Ordnung (§2) die "Konstanten" A und B als unbekannte Funktion an und fordert, daß die Funktion

$$y(t) := A(t)\,y_1(t) + B(t)\,y_2(t)$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung sein soll. Zur Durchführung muß man demnach $y'(t)$ und $y''(t)$ aus dem vorstehenden Ansatz ausrechnen und in die Dgl einsetzen.

$$\left.\begin{aligned} y &= Ay_1 + By_2 \\ y' &= A'y_1 + Ay_1' + B'y_2 + By_2' \\ y'' &= A''y_1 + A'y_1' + A'y_1' + Ay_1'' + B''y_2 + B'y_2' + B'y_2' + By_2'' \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by = {} & A\{y_1'' + ay_1' + by_1\} + B\{y_2'' + ay_2' + by_2\} \\ & + a(A'y_1 + B'y_2) + 2A'y_1' + 2B'y_2' + A''y_1 + B''y_2 . \end{aligned}$$

Da y_1 und y_2 Lösungen der homogenen Gleichung sind, sind die ersten beiden Summanden der rechten Seite $=0$, und es ist

$$y'' + ay' + by = A'\{ay_1 + 2y_1'\} + B'\{ay_2 + 2y_2'\} + A''y_1 + B''y_2 .$$

Von A und B kommen nur 1. und 2. Ableitungen vor, so daß sich mit $f(t) = A'(t)$ und $g(t) = B'(t)$ die Dgl 1. Ordnung

$$f\{ay_1 + 2y_1'\} + f'y_1 + g\{ay_2 + 2y_2'\} + g'y_2 \stackrel{!}{=} h$$

ergibt. Ist nun z.B. y_1 nirgendwo $=0$, so kann man $g=0$ setzen und erhält auf diese Weise eine lineare Dgl 1. Ordnung für f,

$$f' + \{a + 2\frac{y_1'}{y_1}\}f = h/y_1 ,$$

deren Lösung noch einmal integriert werden muß, um A zu erhalten. Es ist dann $B \equiv$ const. Da y_1 und y_2 nicht gleichzeitig verschwinden können (was abstrakt - aber auch nach der Formel bzw aus der Eindeutigkeit des Anfangswertproblems folgt), kann dieses Verfahren stets lokal angewendet werden und man erhält (lokal) eine spezielle Lösung.

Methode 3 (Ansatzmethoden). In den meisten Fällen ist die rechte Seite h der Dgl eine Funktion eines bestimmten Typs (Polynom, trigonometrische-, Exponentialfunktion); dann setzt man $y_{sp}(t)$ als Funktion gleichen Typs mit unbekannten Parametern (Koeffizienten) an; aus der Gültigkeit der Dgl werden dann diese Parameter bestimmt (meist durch Koeffizientenvergleich). Diese Methode führt oft sehr schnell zum Erfolg - erfordert aber eine gewisse Übung hinsichtlich des Hantierens mit elementaren Funktionen

Methode 4 (Potenzreihenansatz). Ist die rechte Seite $h(t)$ eine analytische Funktion, die z.B. um $t=0$ in eine Reihe entwickelbar ist,

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n ,$$

so setzt man $y(t)$ ebenfalls als analytische Funktion an,

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

mit zunächst unbekannten Koeffizienten a_n, $n \geq 0$. Bilden wir $y'(t)$ und $y''(t)$, so ergibt der Ausdruck $y'' + ay' + by$ ebenfalls eine Potenzreihe, die – nach Potenzen geordnet – mit $h(t)$ verglichen wird; also

$$y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1} \quad \text{und} \quad y''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2},$$

und daraus folgt: $y'' + ay' + by =$

$$\sum_{n=0} \left\{(n+2)(n+1)\, a_{n+2} + a(n+1)\, a_{n+1} + b\, a_n\right\} t^n =: \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

Sind nun zwei Potenzreihen gleich (für alle $t \in$ Konvergenzbereich) so müssen die Koeffizienten übereinstimmen. Hieraus erhalten wir die Rekursionsformeln (= Differenzengleichung)

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a(n+1)a_{n+1} + b a_n = b_n \quad , n \geq 0 ,$$

welche eine eindeutige Lösung hat, wenn a_0 und a_1 frei vorgegeben werden. Denn bei Vorgabe von a_0 und a_1 erhält man (für $n=0$)

$$2a_2 + a a_1 + b a_0 = b_0 \Rightarrow a_2 \text{ bekannt}$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 2 a_3 + 2 a a_2 + b a_1 = b_1 \Rightarrow a_3 \text{ bekannt} \quad \text{usw.}$$

Das Verfahren scheint mühsam zu sein – jedoch gibt es in der Theorie linearer Differenzengleichungen recht brauchbare Formeln

Neben diesen Methoden gibt es noch andere Verfahren – z.B. die Methode der Laplace-Transformation (welche der komplexen Analysis zugeordnet ist). Außerdem kann man sich lineare Dgl'n 2. Ordnung auf lineare Systeme 1. Ordnung (mit 2×2-Matrix) äquivalent überführen, so daß sich – zusammen mit der Eigenwert-Theorie solcher Gleichungen eine gesonderte Theorie ergibt.

Wir erläutern nun die vorstehenden Methoden an Beispielen.

Beispiel 1 (Grundlösungsverfahren)

$$y'' - y = t\sin t.$$

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist $y(t) = Ae^{t} + Be^{-t}$;
Aus $y(0) \stackrel{!}{=} 0$ und $y'(0) \stackrel{!}{=} 1$ folgt dann

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ A-B=1 \end{array}\right\} \iff A = 1/2 = -B \implies y(t) = \tfrac{1}{2}e^{t} - \tfrac{1}{2}e^{-t} = \sinh t$$

$$\implies y_{sp}(t) = \tfrac{1}{2}\int_0^t \left\{ e^{(t-x)} - e^{-(t-x)} \right\} x\sin x \, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}e^{t}\int_0^t e^{-x} x\sin x\,dx - \tfrac{1}{2}e^{-t}\int_0^t e^{x} x\sin x\,dx$$

Die Integrale löst man mit wiederholter partieller Integration;
Wir berechnen zunächst das zweite Integral.
Setzen wir $u' = xe^{x}$, so ist $u = e^{x}(x-1)$,
also

$$\int_0^t xe^{x}\sin x = e^{t}(t-1)\sin t - \int_0^t e^{x}(x-1)\cos x\,dx =$$

$$= e^t(t-1)\sin t \quad + \underbrace{\int^t e^x \cos x\, dx}_{(1)} - \underbrace{\int^t e^x x \cos x\, dx}_{(2)}$$

Integral (1) erfolgt wieder partiell

$$\int^t e^x \cos x\, dx = e^t \cos t + \int^t e^x \sin x dx = e^t(\cos t + \sin t) - \int^t e^x \cos x\, dx$$

$$\Rightarrow \int^t e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^t(\cos t + \sin t)$$

Integral 2 erfährt nochmal eine partielle Integration

$$(2) = e^t(t-1)\cos t + \int e^x (x-1) \sin x\, dx =$$

$$e^t(t-1)\cos t + \int^t e^x x \sin x - \underbrace{\int^t e^x \sin x}_{(3)}$$

Integral (3) wird wie Integral (1) behandelt:

$$(3) = e^t \sin t - \int e^t \cos t \overset{(1)}{=} \frac{1}{2} e^t(\sin t - \cos t).$$

In (2) haben wir das unbekannte Integral wiedererhalten, und auf die linke Seite gebracht, ergibt dies

$$2 \int^t e^x x \sin x = e^t(t-1)\sin t + \frac{1}{2} e^t(\cos t + \sin t) - e^t(t-1)\cos t$$

$$+ \frac{1}{2} e^t(\sin t - \cos t) = e^t\{(t-1)(\sin t - \cos t) + \sin t\}$$

$$= -e^t(t-1)\cos t + e^t t \sin t =: 2\, F(t)$$

Das erste Integral erhält man hieraus mit der Substitution $x \mapsto -x$, und der Wert ist $-F(-t)$. Daraus folgt

$$(*)\ y_{sp}(t) = \frac{1}{4}\{+(-t-1)\cos t - t\sin t + (t-1)\cos t - t \sin t\}$$

$$= -\frac{1}{2} t \sin t - \frac{1}{2}\cos t,$$

was man durch Einsetzen bestätigt.

(*) e^t Faktor wird mit e^{-t} zu 1

Beispiel 2 (Variation der Konstanten). Wir betrachten die gleiche Dgl, $y'' - y = t\sin t$. Da e^t eine nicht-verschwindende Lösung der homogenen Gleichung ist, machen wir den Ansatz

$$y_{sp}(t) = A(t)e^t$$

und erhalten wegen $y' = A'e^t + Ae^t$, $y'' = 2A'e^t + A''e^t + Ae^t$, also

$$y'' - y = e^t\{2A' + A''\} = t\sin t$$

$$\Rightarrow \quad 2A' + A'' = e^{-t} t\sin t \quad , \quad \text{mit } f = A'$$

$$f' + 2f = e^{-t} t\sin t.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$f(t) = \left\{c + \int_0^t e^{-x} x\sin x \cdot e^{2x}\, dx\right\} e^{-2t}$$

$$= \left\{c + \int_0^t e^x x\sin x\, dx\right\} e^{-2t}$$

$$= \left\{c + \tfrac{1}{2} e^t \{(1-t)\cos t + t\sin t\right\} e^{-2t}$$

$$= ce^{-2t} + \tfrac{1}{2} e^{-t}\{(1-t)\cos t + t\sin t\}$$

$\Rightarrow A(t) = \int^t f(t)\,dt$; diese Integrale haben wir bereits berechnet

Es folgt die Lösung: $y_{sp} = Ke^t + ce^{-t} - \frac{1}{2}(t\sin t + \cos t)$ (was übrigens mit $K, c \in \mathbb{R}$ gleichzeitig die allgemeine Lösung darstellt).

<u>Beispiel 3</u> (Ansatz-Methode). Auch hier betrachten wir die Dgl

$$y'' - y = t\sin t$$

und machen den Ansatz, welcher vom Typ der rechten Seite ist:

$$y(t) = (a+bt)\sin t + (c+dt)\cos t,$$

denn die rechte Seite ist vom Typ $P(t)\cdot Q(\sin t, \cos t)$ mit Polynomen 1. Grades. Beachte, daß im Ansatz auch cosinus-Terme geführt werden müssen (da beim Ableiten aus Sinus Terme Kosinus-Terme entstehen). Es ist

$$\begin{aligned} y'(t) &= b\sin t + (a+bt)\cos t + d\cos t - (c+dt)\sin t \\ &= (b-c-dt)\sin t + (d+a+bt)\cos t \\ y''(t) &= -d\sin t + (b-c-dt)\cos t + b\cos t - (d+a+bt)\sin t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y'' - y = \sin t\{-2a-2d-2bt\} + \cos t\{2b-2c-2dt\} = t\sin t$$

$$\Leftrightarrow \{-2a-2d-(2b+1)t\}_1 \sin t + \cos t\{2b-2c-2dt\}_2 = 0$$

s.u.

Soll dies für alle t gelten, so müssen beide Klammern verschwinden. Denn: ist $t = k\pi$, so folgt

$$2b - 2c - 2d\cdot k\pi = 0 \Leftrightarrow b = c \text{ und } d = 0$$

Dann ist auch die Klammer vor $\sin t$ identisch Null, was gleichwertig zu $a = -d$ und $b = -\frac{1}{2}$ ist. Damit folgt auch $a = \overset{\shortparallel}{-d} (=0)$ und

$$y_{sp} = -\frac{1}{2}\{t\sin t + \cos t\}$$

<u>ist eine</u> spezielle Lösung (in Übereinstimmung mit Beisp. 2)

$$\{\ \}_1 = 0 \Rightarrow b = -1/2 \text{ und } a = -d, \quad \{\ \}_2 = 0 \Rightarrow d = 0 \text{ und } b = c$$

Um die Summe $\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^{m-1}m$ ausrechnen zu können, bedienen wir uns einer trickreichen Anwendung der geometrischen Summe:

$$\frac{1-q^n}{1-q} = \sum_{m=0}^{n-1} q^m$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-(-q)^n}{1+q} = \sum_{m=0}^{n-1}(-q)^m = g(q), \forall q \neq -1$$

Offenbar ist $g'(1)$ der gesuchte Reihenwert:

$$g'(1) = -\sum_{m=0}^{n-1} m(-1)^{m-1} = -\frac{n(-q)^{n-1}(1+q) - (1-(-q)^n)\cdot 1}{(1+q)^2}\Bigg|_{q=1}$$

$$= \frac{1}{4}\left((-1)^{n-1}\{1-2n\}+1\right)$$

$$\Rightarrow \alpha_n = \alpha_0\cdot\frac{1}{(2n)!} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2n)!}\left((-1)^{n-1}\{1-2n\}+1\right)$$

$$= \frac{\alpha_0+1/2}{(2n)!} + \frac{1}{2}\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} - \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\right\},$$

$$\Rightarrow y(t) = (\alpha_0+1/2)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}t^{2n}\left\{\frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n-1)!}\right\}$$

$$= (\alpha_0+1/2)\cosh t - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}t^{2n}$$

$$= (\alpha_0+1/2)\cosh t - \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}t\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}t^{2n-1}$$

$$= (\alpha_0+1/2)\cosh t - \frac{1}{2}\{\cos t + t\sin t\}.$$

Da $\cosh t$ eine Kombination aus e^t und e^{-t} ist, da $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ beliebig ist, ergibt sich hiermit die völlige Übereinstimmung mit den vorherigen Rechnungen.

$2\alpha t$

Aus $-\sin t\{2a+2b+2ct+t\} + \cos t\{2b-2c\} + \{\alpha - \beta t\} = 0 \quad \forall t$ folgt nämlich, daß alle geschweiften Klammern identisch verschwinden (und trivialerweise auch umgekehrt). Dies sieht man z. B. einfach so ein, indem $t = 2k\pi$ sowie $t = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, gesetzt wird:

$t = 2k\pi \Rightarrow (2b-2c) + \alpha - \beta k\pi = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \beta = 0$ und $2b-2c = -\alpha$

$t = (2k+1)\pi \Rightarrow -(2b-2c) + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ und $b = c$.

Somit folgt $\sin t\{2a+2b+2ct+t\} = 0 \quad \forall t$, woraus $2a+2b+2ct+t = 0$ also $a = -b$ und $c = -\frac{1}{2}$ folgt.

<u>Beispiel 4</u> (Potenzreihen-Methode). Die Dgl $y'' - y = t \sin t$ versuchen wir, mit dem Reihen-Ansatz

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

zu lösen. Dann ist $y''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$, also

$$y''(t) - y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n(n-1) a_n t^{n-2} - a_n t^n \right) = t \sin t$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} t^n \{(n+2)(n+1) a_{n+2} - a_n\} = t \sin t = t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} t^n \{(n+2)(n+1) a_{n+2} - a_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+2} =: \sum_{n=0}^{\infty} t^n b_n$$

Sollen beide Reihen für alle t übereinstimmen, so müssen die Koeffizienten für jede t-Potenz gleich sein, also

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} - a_n = b_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \ldots$$

Nun ist $b_0 = b_1 = 0$, sowie $b_{2n+1} = 0 \ (n \geq 0)$, $b_{2n+2} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$, $n \geq 0$

Ausführlich heißt dies:

$$2a_2 = a_0 \,,\quad 6a_3 = a_1 \,,\quad 12\, a_4 = a_2 + b_2 \,,\quad 20\, a_5 = a_3 + b_3 \dots$$

Setzen wir $a_1 = 0$, so folgt, daß alle $a_{2n+1} = 0$ sind, weil dies wegen $b_{2k+1} = 0$ aus der Differentialgleichung folgt.

$$a_{2n+2} = \frac{a_{2n}}{(2n+2)(2n+1)} + \frac{b_{2n}}{(2n+2)(2n+1)}$$

Wir setzen $\alpha_n = a_{2n}$, $\beta_n = b_{2n}$ und erhalten dann die Differenzengleichung

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{(2n+2)(2n+1)} + \frac{\beta_n}{(2n+2)(2n+1)} \,.$$

Nun ist $\frac{\beta_n}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!\,(2n+2)(2n+1)} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+2)!}\, 2n$

Man kann – letztlich elementar oder mit Induktion –, klarmachen, daß die Differenzengleichung

$$\boxed{\alpha_{n+1} = r_n \alpha_n + s_n}$$

die allgemeine Lösung

$$\alpha_n = \alpha_0 \prod_{j=0}^{n-1} r_j + \sum_{m=0}^{n-1} \left\{ s_m \cdot \prod_{j=m+1}^{n-1} r_j \right\}$$

besitzt. Gottlob ist dies in unserem Fall nicht allzu problematisch:

$$\alpha_n = \alpha_0 \cdot \prod_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(2j+2)(2j+1)} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m+2)!}\, 2m \prod_{j=m+1}^{n-1} \frac{1}{(2j+2)(2j+1)}$$

$$= \alpha_0 \cdot \frac{1}{(2n)!} + 2 \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{m-1} \cdot m \cdot \frac{1}{(2m+2)!} \cdot \frac{1}{2m+3} \cdots \frac{1}{2n}$$

$$= \alpha_0 \cdot \frac{1}{(2n)!} + 2\, \frac{1}{(2n)!} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{m-1}\, m$$

§10 Die lineare Differentialgleichung höherer Ordnung (mit konstanten Koeffizienten)

Die Methode, lineare Dgl'n 2-ter Ordnung zu lösen – wie in §9 vorgestellt – kann ausnahmslos auf den Fall höherer Ordnung übertragen werden. Dies bezieht sich sowohl auf die "homogene" Gleichung, welche wir mittels der $e^{\lambda t}$-Methode vollständig gelöst haben, als auch auf die "inhomogene" Gleichung.

Theorem: (Homogene Differentialgleichung): Die lineare

(1) Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$L(y) := y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

besitzt ein System von n ("linear unabhängigen") Lösungen $y_1, \dots, y_n$ und jedes y mit $L(y) = 0$ hat eine eindeutige Darstellung der Form

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \dots + \alpha_n y_n(t) \quad \text{mit } \alpha_i \in \mathbb{R},$$

(2) Das Anfangswertproblem

$$L(y) = 0 \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n+1}$$

ist stets eindeutig lösbar.

(3) Man erhält die Gesamtheit aller Lösungen von $L(y) = 0$ durch den $e^{\lambda t}$-Ansatz: Dann ist nämlich

$$L(y) = 0 \iff P_L(\lambda) = 0, \quad \text{also}$$

$$P_L(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad \text{(charakt. Gleichung).}$$

Genauer gilt: Man muß demnach die Nullstellen dieses Polynoms bestimmen. Sind dies die n verschiedenen reelle Werte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so ist

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \dots, y_n(t) = e^{\lambda_n t}$$

ein System unabhängiger Lösungen der Dgl, und die allg. Lösung ist eine Linearkombination hiervon, also

$$y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} \quad , \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Natürlich ist dies nur ein Spezialfall: Im allgemeinen wird $P_L(\lambda)$ mehrfache und auch komplex-konjugierte Nullstellen haben. Wie wir aus dem Hauptsatz der PBZ wissen, gilt:

$P_L(\lambda)$ – habe genau r reelle Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ der Vielfachheiten $n_1, \dots, n_r$
– habe genau s konjugiert komplexe Nullstellen $\mu_1, \dots, \mu_s$ der Vielfachheiten $m_1, \dots, m_s$,

also $$P_L(\lambda) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda - \lambda_i)^{n_i} \cdot \prod_{i=1}^{s} \left[(\lambda - \mu_i)(\lambda - \bar{\mu}_i)\right]^{m_i},$$

so sind mit $\mu_j := \varrho_j + i\omega_j$ die n Funktionen

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{n_1 - 1} e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_r t}, te^{\lambda_r t} \dots t^{n_r - 1} e^{\lambda_r t},$$

$$e^{\varrho_1 t} \cos\omega_1 t, \dots, t^{m_1 - 1} e^{\varrho_1 t} \cos\omega_1 t, \dots, e^{\varrho_s t} \cos\omega_s t, \dots, t^{m_s - 1} e^{\varrho_s t} \cos\omega_s t$$

$$e^{\varrho_1 t} \sin\omega_1 t, \dots, t^{m_1 - 1} e^{\varrho_1 t} \sin\omega_1 t, \dots, e^{\varrho_s t} \sin\omega_s t, \dots, t^{m_s - 1} e^{\varrho_s t} \sin\omega_s t$$

eine Basis des Lösungsraumes $V_0 = \{y \mid L(y) = 0\}$.
Mit anderen Worten: Jede Lösung aus V_0 kann geschrieben werden

$$y(t) = \sum_{i=1}^{r} P_i(t) e^{\lambda_i t} + \sum_{i=1}^{s} e^{\varrho_i t} \{ Q_i(t) \cos \omega_i t + R_i(t) \sin \omega_i t$$

mit willkürlichen Polynomen P_i, Q_i, R_i mit:

$$\text{Grad } P_i \leq n_i - 1 \qquad (i = 1, \dots, r)$$

$$\text{Grad } Q_i \leq m_i - 1 \text{ und } \text{Grad } R_i \leq m_i - 1 \quad , i = 1 \dots, s.$$

Obwohl dieses Theorem nicht allzuschwer zu beweisen ist, übergehen wir diesen Teil und erwähnen, daß man die $e^{\lambda t}$-Methode leicht nachführen kann. Es sollte jedenfalls klar sein, daß durch den $e^{\lambda t}$-Ansatz die Dgl in eine Polynom-Gleichung übergeht. Hat man deren Lösungen (in $\mathbb{C}$) samt Vielfachheiten, so muß man beispielsweise den Nachweis erbringen, daß

$$e^{\varrho_i t} Q(t) \cos \omega_i t \quad \text{mit Grad } Q \leq m_i - 1$$

eine Lösung der Dgl ist. Verwenden wir die komplexe Schreibweise, so ist zu zeigen, daß

$$y(t) = Q(t) e^{\lambda t}$$

eine Lösung der Dgl ist, wenn λ eine Nullstelle von P_L der Ordnung m und Grad $Q \leq m-1$ ist. Hierzu genügt es ebenfalls, den Fall $y(t) = t^k e^{\lambda t}$ mit $0 \leq k \leq m-1$ zu wählen. Der Leser möge sich nun dieses exemplarisch $(m=2)$ herleiten.

Beispiele:

① Die Dgl $y''' - y = 0$ hat die charakteristische Gleichung

$$\lambda^3 - 1 = 0,$$

mit den Lösungen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}$.

Alle Vielfachheiten sind 1 und wir erhalten

$$y(t) = Ae^{t} + e^{-\frac{1}{2}t}\{B\cos\tfrac{1}{2}\sqrt{3}t + C\sin\tfrac{1}{2}\sqrt{3}t\}, \quad A,B,C \in \mathbb{R}$$

als allgemeine Lösung.

(2) Die Dgl $y'''' + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = 0$
hat die Gleichung

$$P_L(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

zur Folge und es ist $P_L(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda^2+1)$. Demnach ist die allgemeine Lösung der Dgl

$$y(t) = e^{-t}\{A + Bt\} + C\cos t + D\sin t, \quad A,B,C,D \in \mathbb{R}$$

(3) Aus der Dgl $y^{(6)} + 3y^{(4)} + 3y^{(2)} + y = 0$
folgt als charakt. Gleichung

$$\lambda^6 + 3\lambda^4 + 3\lambda^2 + 1 = (\lambda^2+1)^3 = 0,$$

so daß $\mu = \pm i$ Nullstellen der Vielfachheiten 3 sind;

$$y(t) = (A + Bt + Ct^2)\cos t + (A' + B't + C't^2)\sin t$$

mit $A, A', B, B', C, C' \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung der Dgl.

Inhomogene Gleichungen löst man ebenfalls durch
2) – geeignete Ansätze $\longrightarrow$ Bsp. 8 – 10
1) – Variation der Konstanten $\longrightarrow$ Produkt-Ansatz
– Potenzreihen – Differenzengleichungen. $\downarrow$ Bsp. 5 – 7

<u>Bemerkung</u> (Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten)

Gleichungen vom Typ

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)\, y(x) = h(x)$$

lassen sich natürlich nicht so einfach lösen wie der Fall konstanter a_i; Laplace-Transformation sowie diverse Methoden komplexer Analysis sind hier anwendbar. Wenngleich wir hier nicht auf den allgemeinen Fall eingehen werden, betrachten wir folgenden Sonderfall, die sog. <u>Euler-Differentialgleichung</u>

$$L(y) = x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y(x) = 0$$

mit konstanten $a_i \in \mathbb{R}$.

<u>Theorem (Euler-Gleichung).</u>

(1) Die Euler-Dgl $L(y) = 0$ wird durch die Transformation $x = e^t$, also $t = \ln x$ in eine lineare Dgl mit konstanten Koeffizienten transformiert:

d.h. die Funktion $\tilde{y}(t) := y(e^t)$
genügt einer linearen Dgl mit konstanten Koeffizienten

(2) Es gilt die Identität: $L(y) = 0 \Leftrightarrow L(y^m) = P(m)x^m$
mit dem Polynom

$$P(m) = m(m-1)\cdots(m-n+1) + a_{n-1}\, m(m-1)\cdots(m-n+2)$$
$$+ a_{n-2}\, m(m-1)\cdots(m-n+3) + \dots + a_0$$

Wir überlassen den Beweis, welcher durch einfaches Nachrechnen geführt wird, dem Leser

Beispiel: $x^2y'' + xy' - y = 0.$

Wir setzen $x = e^t$ und $\tilde{y}(t) = y(e^t)$ und erhalten
$\tilde{y}'(t) = y'(e^t)e^t$, $\tilde{y}''(t) = y''(e^t)\cdot e^t \cdot e^t + y'(e^t)e^t$ —
bzw. umgekehrt –

$y(x) = \tilde{y}(\ln x) \Rightarrow y'(x) = \tilde{y}'(\ln x)\, ^1/_x \Rightarrow y''(x) = \tilde{y}''(\ln x)\frac{1}{x^2} +$

$\tilde{y}'(\ln x)\cdot -\frac{1}{x^2}$. Setzt man dies in die Dgl ein, so folgt

$$\tilde{y}''(t) - \tilde{y}'(t) + \tilde{y}'(t) - \tilde{y}(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \tilde{y}''(t) - \tilde{y}(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{y}(t) = Ae^t + Be^{-t}$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = Ax + B\cdot {}^1/_x \quad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}.$$

§ 11 Differentialgleichungen zweiter Ordnung; Energie-Satz

Differentialgleichungen zweiter Ordnung sind uns in §9 in der speziellen Struktur

$$y'' + ay' + by = h(x)$$

begegnet; es fällt nicht schwer, sich formale Verallgemeinerungen vorzustellen, und es ist auch klar, daß in der Praxis der vorstehende einfache Fall nur Modellcharakter besitzt bzw. daß auch andere Differentialgleichungen zu diskutieren sind.
So genügt z.B. das mathematische Pendel im reibungsfreien Fall der Dgl

$$\ddot{\varphi} + c\sin\varphi = 0 \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R}_+ .$$

Dies ist eine nicht-lineare Differentialgleichung. Wohl können wir hier nicht die allgemeinste Form

$$F(x, y', y'') = 0$$

diskutieren – wir befassen uns aber mit wichtigen Spezialfällen, welche den linearen Fall verallgemeinern bzw. ergänzen.

<u>Satz 1</u> (Typ: $y'' = f(x, y')$): Eine Differentialgleichung vom Typ

$$y'' = f(x, y'),$$

in welcher die gesuchte Funktion y nicht explizit auftritt, kann stets auf eine Gleichung 1. Ordnung (mit anschließender Integration) zurückgeführt werden.

Schreibe nämlich $z(x) := y'(x)$, so ist $z'(x) = f(x, z)$ die gesuchte Dgl 1. Ordnung.

<u>Beispiel:</u> $y'' = x\,y'^2$ (nichtlinear)

$\Leftrightarrow \quad z' = x z^2 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{z} = \frac{1}{2}x^2 + c \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{-2}{x^2 + C}$

also $y = \int z = -\frac{2}{c} \cdot \sqrt{c} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{c}} = -\frac{2}{\sqrt{c}} \arctan \frac{x}{\sqrt{c}}$.

<u>Satz 2</u> (Typ $y'' = f(y, y')$): Eine Differentialgleichung vom Typ

$$y'' = f(y, y'),$$

in welcher also die Variable x nicht explizit vorkommt, kann durch 2 Dgl'n 1. Ordnung gelöst werden. (dort wo $y' \neq 0$ ist).

Man verwendet einen ähnlichen Kunstgriff wie bei Gleichungen 1. Ordnung: Für $y' \neq 0$ ist die Lösung $y(x)$ invertierbar, dh $y = y(x)$ ist nach x auflösbar, x ist dann eine Funktion von y. Setzen wir

$$p(y) := y'(x(y)) = \frac{d}{dx} y(x)\Big|_{x = x(y)}$$

so ist $\frac{dp}{dy}(y) = y''(x(y)) \cdot \frac{dx}{dy} = y''(x(y)) \cdot 1/p(y)$

$\Leftrightarrow \quad y'' = p p' = f(y, p) \quad \Leftrightarrow \quad p'(y) = \frac{1}{p(y)} f(y, p) = \tilde{f}(y, p)$

und dies ist eine Dgl für p in der Variablen y. Ist nun $p(y)$ bekannt, so ist noch die separierte Gleichung

$$y' = p(y) \qquad \int \frac{1}{p(y)} dy = x + c$$

zu lösen – wobei hier y' die Ableitung nach x bedeutet! Alternativ hierzu können wir auch die Umkehrfunktion $x(y)$ direkt durch Integration ermitteln:

$$x(y) = \int^y x'(y)\,dy = \int^y \frac{1}{p(y)}\,dy .$$

Beispiel: $y'' = yy' = yp$; also $p \cdot p' = yp \iff p' = y$

$\iff p(y) = \frac{1}{2}y^2 + c \iff y' = \frac{1}{2}y^2 + c \iff y' = \frac{1}{2}(y^2 + a)$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan \frac{y}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}x + K \iff y(x) = \sqrt{a}\tan\left(\frac{\sqrt{a}}{2}x + K\right).$

Satz 3 ("Energie-Satz") Eine Differentialgleichung der Form

$$y'' = f(y),$$

bei denen also x- und y'-Terme fehlen, läßt sich durch den Kunstgriff

$$y'y'' = y'f(y) \iff \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(y'(x))^2 = \frac{d}{dx}F(y(x))$$

mit $F(y) = \int f(y)\,dy$ auf die Gleichung

$$\boxed{\frac{1}{2}y'^2 = F(y) + C}$$ "Energie-Erhaltungssatz",

– welche ihrerseits eine Dgl 1. Ordnung ist – überführen.

Aus der üblichen physikalischen Bedeutung [$y(x) \mathrel{\hat=}$ Weg, $y' \mathrel{\hat=}$ Geschwindigkeit, $y'' \mathrel{\hat=}$ Beschleunigung] läßt sich auch die Bezeichnung Energie-Erhaltungssatz deuten:

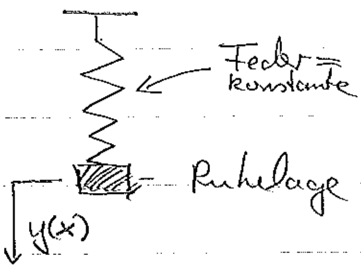
Physikalische Vorgänge, bei denen die Kräftebilanz aufgrund des Newton'schen Bewegungsgesetzes auf eine Gleichung der Form

$$y'' = \text{Funktion von } y$$

führt – insbesondere bei denen y' nicht explizit auftritt, was selbst nichts anderes bedeutet, als daß es sich um reibungsfreie Vorgänge handelt –, erfüllen den Energie-Erhaltungssatz

$$\underbrace{\frac{1}{2}\,y'^2}_{\text{kinetische Energie}} - \underbrace{F(y)}_{\text{potentielle Energie}} = \text{const} \quad \text{(beides „normiert")}$$

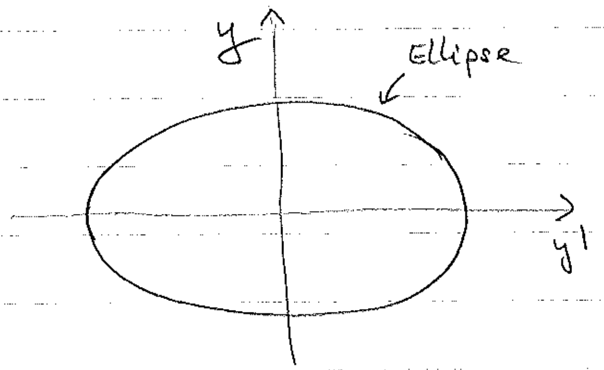
Beispiel ① Denken wir uns einen reibungsfreien Massenschwinger (bei dem also auch die Feder "reibungsfrei, verlustfrei (ohne Erwärmung usw.) arbeitet), so gilt für Auslenkungen $y(x)$ – x = Zeit – aus der Ruhelage die Kräftebilanz



$$my'' + cy = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad y'my'' + cyy' = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{2}m(y')^2}_{E_{kin}} + \underbrace{\frac{1}{2}cy^2}_{E_{pot}} = \text{const}$$



② Beim reibungsfreien freien Fall (aus nicht zu großer Höhe y) gilt die Bilanz

$$m\ddot{y} + mg = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad m\ddot{y} = \underbrace{-mg}_{\text{Konstant}}$$

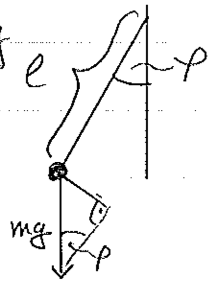
$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + mgy = \text{Konstant} \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{E_{kin}} + \underbrace{mgh}_{E_{pot}} = \text{const}$$

in klassischer Notation.

Die Lösung dieser Dgl ist natürlich trivial: $\ddot{y} = -g \Longleftrightarrow$ $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + at + b$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$, nach Anfangsbedingung zu bestimmen.).

③ Ein weiteres schönes Beispiel liefert der "Gravitationskollaps" für Schwarze Löcher – wir behandeln dies im abschließenden Paragraph 12.

④ Als weiteres Rechenbeispiel soll das <u>mathematische Pendel</u> dienen. Die den Massenpunkt m in tangentieller Richtung antreibende Kraft ist $mg \sin\varphi$, woraus die Gleichung folgt:



$$m l \ddot{\varphi} + m g \sin\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin\varphi = 0 .$$

Der Energiesatz liefert: $\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{g}{l}\cos\varphi = c$

$\Rightarrow \dot{\varphi} = \sqrt{2c + k\cos\varphi}$, eine separierte Dgl, welche nur mit mühseligen trigonometrischen Tricks gelöst werden kann,

$$t = \int^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{2c + k\cos\varphi}}$$

unter der speziellen Anfangsbedingung $\dot{\varphi} = 0$ für $\varphi = \pi$ (was bedeutet, daß das Pendel bis zum oberen Umschlage=punkt pendelt) ergibt sich $c = g/l$ und das Integral ist lösbar. Mit $2t = \varphi$ und dem Additionstheorem folgt:

$$\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(1+\cos\varphi)}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\cos t} = \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \sqrt{\frac{1+\sin\varphi/2}{1-\sin\varphi/2}}$$

$\Longleftrightarrow \varphi(t) = 2 \arcsin\left(\tanh \sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right).$

Da die Differentialgleichung

$$y'' + f(y) = 0 \quad \text{bzw} \quad y'' = g(y)$$

einer reibungsfreien Bewegung entspricht, (wie z.B. im Falle $f(y) = cy$: reibungsfreie Federschwingung) stellt sich die Frage ganz zwangsläufig:

Wann besitzt die Dgl $y'' + f(y) = 0$ periodische Lösungen?

Theorem (Periodizität der Dgl $y'' + f(y) = 0$)

Unter den drei Bedingungen

a) f ist ungerade, $f(-y) = -f(y)$

b) $f(y) > 0$ für $y > 0$

c) Für keine Folge $(y_n) \to \infty$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = 0$

(dh. $\frac{1}{f(y)}$ bleibt bei $y \to \infty$ beschränkt)

gilt: Jede Lösung der Dgl $y'' + f(y) = 0$ ist periodisch.

Beweis: Wir zeigen den Satz in mehreren Schritten:

Beh 1: Ist $y(x)$ eine Lösung, so auch $-y(x)$, $y(-x)$ und $y(x+x_0)$ für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$.

Denn: $-y''(x) + f(-y) = -(y'' + f(y)) = 0$;

$$\frac{d^2}{dx^2}\, y(-x) = y''(-x) \implies y''(-x) + f(y(-x)) = 0$$

Ebenso ist $\frac{d^2}{dx^2}\, y(x+x_0) = y''(x+x_0)$, so daß die Dgl gilt.

Beh 2: Sei y eine Lösung der Dgl. Ist dann $y(x_0) = 0$, so ist $y(x+x_0) = -y(x_0-x)$

$$y(x_0+x) = -y(x_0-x)$$

Denn: Nach Beh. 1 sind $z_1(x) := y(x+x_0)$ und $z_2(x) = -y(x_0-x)$

Lösungen der Dgl mit $z_1(0) = 0 = z_2(0)$
Nun ist aber auch $z_1'(0) = y'(x_0) = z_2'(0)$.
Andererseits weiß man, daß die Differentialgleichung lokal eindeutig lösbar ist, wenn die Anfangsbedingung $z(0) = z_0$, $z'(0) = \tilde{z}_0$ gegeben ist. Daher muß $z_1 = z_2$ sein

Beh 3: Sei y eine Lösung der Dgl. Ist dann $y'(x_1) = 0$, so ist $y(x + x_1) = y(x_1 - x)$

Denn: Nach Beh 1 sind $z_1 = y(x_1 + x)$ und $z_2 = y(x_1 - x)$ Lösungen – die aber wiederum die gleichen Anfangswerte haben, $z_1(0) = z_2(0)$ und $z_1'(0) = 0 = z_2'(0)$. Wie eben ist $z_1 = z_2$

Beh 4: Sei y eine Lösung der Dgl mit
a) Es gebe eine Nullstelle x_0 von y
b) Es gebe eine Nullstelle x_1 von y' mit $x_1 \neq x_0$
$\Rightarrow$ y ist periodisch; genauer: $y(x + 4(x_1 - x_0)) = y(x)$

Denn: Wir haben insgesamt

$$y(x_1 + x) = y(x_1 - x) \quad \text{und} \quad y(x_0 + x) = -y(x_0 - x)$$

(das heißt übrigens, daß y ungerade bezüglich seiner Nullstellen und gerade bezüglich der Nullstellen seiner Ableitung ist; es folgt hieraus interessanterweise
i) $y(x_0) = 0 \Rightarrow y'(x_0) \neq 0$
ii) $y'(x_1) = 0 \Rightarrow x_1$ lokales Extremum
Wäre nämlich $y'(x_0) = 0$, so wäre (mit $x_1 = x_0$ gesetzt)

$$y(x_0 + x) = y(x_0 - x) = -y(x_0 + x) \quad \forall x \Rightarrow y(x_0 + x) \equiv 0.$$

Die zweite Behauptung ii) folgt ebensoleicht: da $y(x_1 + x) = y(x_1 - x)$ ist, kann – bei flacher Tangente – x_1 nur ein lok

Maximum oder Minimum (keine Sattelstelle!) sein.)
Der Nachweis der Periodizität ist elementar – aber trickreich:
Indem wir ständig die vorstehenden Gleichungen benutzen, folgt

$$y(x+4(x_1-x_0)) = y(x_1+[3x_1-4x_0+x])$$

$$= y(x_1-[3x_1-4x_0+x]) = y(-2x_1+4x_0-x)$$

$$= y(x_0+[3x_0-2x_1-x]) = -y(x_0-[3x_0-2x_1-x])$$

$$= -y(-2x_0+2x_1+x) = -y(x_1+[x_1-2x_0+x])$$

$$= -y(x_1-[x_1-2x_0+x]) = -y(2x_0-x) = -y(x_0+[x_0-x])$$

$$= y(x_0-[x_0-x]) = y(x).$$

Beh 5: Sei y eine Lösung der Dgl mit $y'(0)=0$, $y(0)\neq 0$
$\Rightarrow$ y hat eine Nullstelle

Konsequenz: Dann ist y periodisch.
Ist $y(0)=0$, so ist $y = \text{const.} = 0$.

Beweis: Es ist $f(t) > 0$ für $t > 0$ (Vor. b). Ist nun z.B. $y(0) > 0$, so ist also $y''(0) = -f(y(0)) < 0$. Hieraus folgt, daß $x=0$ ein Maximum ist. Nach Beh 3 ist $y(x) = y(-x)$. Hätte nun y keine Nullstelle, dann wäre $y > 0$ $\forall x$ $\Rightarrow$ $y''(x) < 0$ für alle x $\Rightarrow$ y' streng monoton fallend und y konkav, sowie $y'(x) < 0$ für $x > 0$. Jede Tangente an Graph y schneidet daher die x-Achse – und da y wegen der Konkavität unterhalb der Tangente liegt, schneidet auch y die x-Achse. Analog behandelt man $y(0) < 0$

Beh 6: Sei y eine Lösung der Dgl. Dann gibt es eine Nullstelle der Ableitung.

Denn: Wir haben eben bewiesen, daß nicht gelten kann $y > 0$ und $y' < 0$ (überall) bzw. umgekehrt. Daher kann man o.E. annehmen, daß $y(0) > 0$ und $y'(0) > 0$ gelte (Translations-Argument). Zu zeigen ist dann, daß y' eine Nullstelle besitzt. Andernfalls ist $y' > 0$ also y streng wachsend $\Rightarrow$ $y(x) \geq y(0)$ $\forall x \geq 0$.

Nach Voraussetzung ist $f(y) \geq c > 0$ $\forall y \geq y_0$

$\Rightarrow$ Nach dem MWS gilt mit einem $0 < \tilde{x} < x$:

$$y'(x) - y'(0) = y''(\tilde{x})x = -f(y(\tilde{x}))x \leq -cx$$

$\Leftrightarrow$ $y'(x) \leq y'(0) - cx \longrightarrow -\infty$ bei $x \to \infty$ im Gegensatz zur Annahme.

Nun folgt der Satz gemäß vorstehender Einzelaussagen: Ist y eine Lösung, so hat y' auch eine Nullstelle; dann hat auch y eine Nullstelle, dann ist y periodisch.

Folgerung: Die Differentialgleichungen

$$y'' + cy = 0, \quad y'' + cy^3 = 0, \quad y'' + cy^5 = 0$$

$$\text{— also allgemein: } y'' + cy^{2k+1} = 0 \text{ —}$$

$$y'' + c\tanh y = 0, \quad y'' + c\sinh y = 0, \quad y'' + c\arctan y = 0$$

haben für $(c > 0)$ ausschließlich periodische Lösungen.

§ 12 Anwendungsbeispiele für Differentialgleichungen.

Jeder Versuch, eine nur annähernd ausreichende Übersicht über die Anwendungspalette von Differentialgleichungen geben zu wollen, ist von vornherein aussichtslos: Differentialgleichungen spielen in allen Bereichen von

- Mathematik
- Physik, Chemie und Biologie
- Ingenieurwissenschaften
- Sozial- und Wirtschaftswissenschaften

die zentrale Rolle einer qualifizierten Anwendung mathematischer Methoden, Modelle und Überlegungen.
Dabei ist es vielfach so, daß ein- und dieselbe Gleichung für viele, oft völlig verschiedene Anwendungen verantwortlich ist.
So hat z.B. die berühmte Wachstums-Dgl

$$y' = ay,$$

die mathematisch lediglich die Proportionalität zwischen einer Funktion (y) und ihrer Ableitung (y') fordert mit ihrer einfachen Lösung

$$y = Ke^{ax}$$

in allen Bereichen der Wissenschaften schlechthin ihre Bedeutung.

Beispiel ① (Radioaktiver Zerfall)
Ausgehend von dem Gesetz: "Von einer radioaktiven Substanz der gleichen Art verwandelt sich in gleichen Zeiten stets der gleiche Bruchteil der noch vorhandenen Atome in das Folgeprodukt" erhalten wir die Gleichung

$$f'(t) = -\lambda f(t) \qquad (\lambda > 0;\ f(t) \equiv \text{Maßzahl für die zur Zeit } t \text{ unzerfallenen Atome}).$$

Denn: $f(t+\Delta t) - f(t) \sim f(t)\Delta t$, dh

$$f(t+\Delta t) - f(t) = c\, f(t)\, \Delta t$$

$\Leftrightarrow \quad f'(t) = c f(t)$ (mit $\Delta t \to 0$). Die Lösung der Dgl kann man offenbar so schreiben

$$\boxed{f(t) = f_0 e^{-\lambda(t-t_0)}} \qquad \text{mit } f_0 = f(t_0).$$

Die sog. <u>Halbwertzeit</u> t_H einer radioaktiven Substanz ist diejenige Zeitspanne, in der sich die Substanz auf die Hälfte verringert (was – wie wir gleich sehen werden – unabhängig vom Zeitpunkt ist):

$$t_H = t_2 - t_1 \quad \text{mit} \quad f(t_2) = \tfrac{1}{2} f(t_1)$$

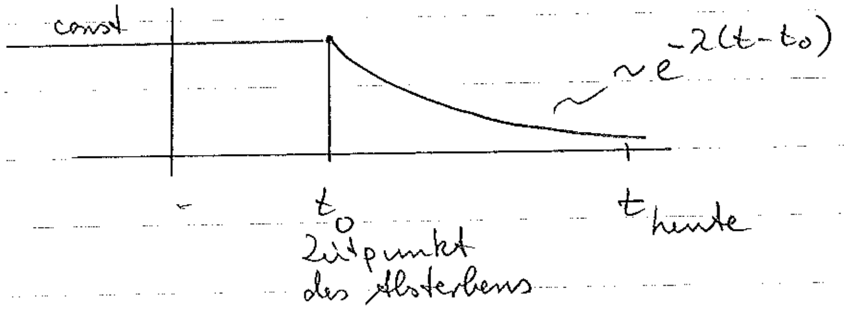
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} = f(t_2)/f(t_1) = \frac{e^{-\lambda(t_2 - t_0)}}{e^{-\lambda(t_1 - t_0)}} = e^{-\lambda(t_2 - t_1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 = e^{\lambda(t_2 - t_1)} \quad \Leftrightarrow \quad t_2 - t_1 = \boxed{t_H = \frac{\log 2}{\lambda}}$$

<u>Konsequenz:</u> t_H kann gemessen werden $\Rightarrow \lambda$ bekannt
$\Rightarrow$ der ganze Zerfallsvorgang bekannt.
$\Rightarrow$ interessante Anwendungen möglich, z.B. bei der

<u>Altersbestimmung mit der C^{14}-Methode:</u>
Vorüberlegung: Die Erdatmosphäre wird von der energiereichen kosmischen Strahlung bombardiert, wodurch in der Atmosphäre Neutronen gebildet werden, die mit Stickstoff radioaktiven

Kohlenstoff C^{14} bilden, der in CO_2 eingelagert und von Pflanzen absorbiert wird. Tiere nehmen durch Fressen von Pflanzen ebenfalls C^{14} auf und lagern es im Gewebe ab.
Es zeigt sich, daß im lebenden Gewebe die Aufnahmerate von C^{14} gerade die Zerfallsrate ausgleicht. Erst bei totem Gewebe hört die C^{14}-Aufnahme auf, und der C^{14}-Anteil sinkt nach dem radioaktiven Zerfallgesetz. Weiterhin nehmen die Physiker an, daß der Beschuß durch kosmische Strahlung unveränderlich ist, weshalb man annimmt, daß die ursprüngliche Zerfallsrate von C^{14} in irgendeiner abgestorbenen Materialprobe zur Zeit ihres Lebens dieselbe ist, wie sie eine Probe derselben Substanz in lebendigem Zustand zur heutigen Zeit aufweist



<u>Prinzip der Altersbestimmung:</u>

$f(t)$ = Maßzahl der unzerfallenen Substanz

$f'(t)$ = Zerfallsrate (pro Gramm und Zeiteinheit

$$\Rightarrow \frac{f'(t_0)}{f'(t)} = \frac{-\lambda f_0}{-\lambda f_0 e^{-\lambda(t-t_0)}} = e^{\lambda(t-t_0)}$$

$$\Rightarrow t - t_0 \equiv \text{Alter} = \frac{1}{\lambda} \log \frac{f'(t_0)}{f'(t)} = \frac{t_H}{\log 2} \log\left(\frac{f'(t_0)}{f'(t)}\right)$$

$$\Leftrightarrow t - t_0 = \frac{t_H}{\log 2} \log\left(\frac{\text{Zerfallsrate, frisch}}{\text{Zerfallsrate, gemessen}}\right)$$

Um einen Eindruck von realistischen Zahlen zu bekommen:
Holzkohle (aus der Höhle von Lascaux) ergab 1950
0,97 Zerfälle / Gramm u. Min
Frisches Holz: 6,68 Zerfälle / Gramm u. Min

$$\Rightarrow t - t_0 = \frac{t_H}{\log 2} \log \frac{6{,}68}{0{,}97} = \frac{5568}{\log 2} \log\left(\frac{6{,}68}{0{,}97}\right) \approx 15\,500 \text{ Ja}$$

Beispiel (2): Chemische Reaktionsgleichungen, Verfahrenstechnik
Bei zahlreichen chemischen Vorgängen gilt folgendes Gesetz: In einem chemischen Vorgang entstehe eine Substanz und $y(t)$ sei deren Masse zur Zeit t. Das Modell sagt nun, daß der Zuwachs (Änderung) pro Zeiteinheit dieser Substanz proportional zu der noch verbleibenden Restmasse (die ja noch zur Reaktion fähig ist) ist. Wird weiter angenommen, daß bei diesem Prozeß eine gegebene Ausgangssubstanz der Masse a letztlich vollständig umgewandelt wird, so erhalten wir die Gleichung

$$y'(t) = k(a-y) \qquad \text{(Reaktionsgleichung 1. Ordnung)}$$

Ist y' proportional zu einer Potenz des Vorrats, so gilt

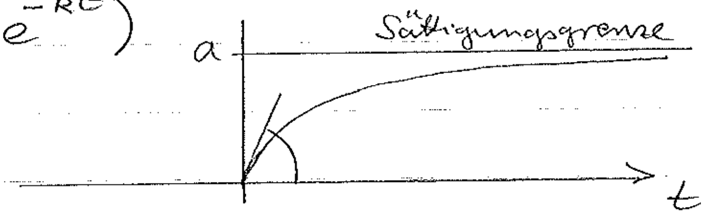
$$y'(t) = k(a-y)^n \qquad \text{(Reaktionsgleichung } n\text{. Ordnung)}$$

Es handelt sich also um mathematisch recht triviale Differentialgleichungen (separierte); offenbar gilt

$$y(t) = a - Ke^{-kt},$$

und mit $y(0)=0$ folgt $K = a$, und deshalb ist

$$y(t) = a(1-e^{-kt})$$



Bei $t=0$ übrigens ist die Reaktion am heftigsten (weil y' dort am größten ist (was man direkt aus der Dgl entnimmt).
Der chemische Prozeß ist also für $n=1$ von exponentiell gegen eine Sättigungsgrenze strebender Natur.
Für $n>1$ haben wir

$$\frac{dy}{(a-y)^n} = k\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-n}(a-y)^{1-n} = -kt - C$$

$$\Leftrightarrow \quad y(t) = a - \left[(n-1)(kt+c)\right]^{\frac{1}{1-n}}$$

Mit der Standard-Anfangsbedingung $y(0)=0$ ist dann $c = \frac{1}{n-1}a^{1-n}$, und wir haben

$$y(t) = a\left\{1 - \left[1+\frac{n-1}{a^{1-n}}kt\right]^{\frac{1}{1-n}}\right\}$$

$$= a\left\{1 - \frac{1}{\sqrt[n-1]{1+\frac{n-1}{a^{1-n}}kt}}\right\}$$

Diese Kurve hat einen zu $n=1$ ähnlichen qualitativen Sättigungsverlauf; wegen $y(0)=0$ ist – wie man aus der Dgl abliest – auch hier $y'(t)$ für $t=0$ maximal, $y'(0)=ak$ und y' nimmt monoton ab.

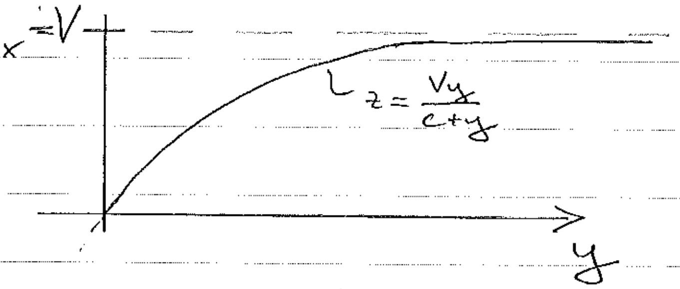
Beispiel ③ : Michaelis-Menton-Reaktionsgleichung

Während bei den chemischen Reaktionsgleichungen n-ter Ordnung die Funktion gleich mit maximaler Steigung beginnt, findet man auch Prozesse, bei denen eine gewisse Anlaufphase stattfindet. Manche solche Prozesse verlaufen gemäß der sog. Michaelis-Menton-Reaktionsgleichung,

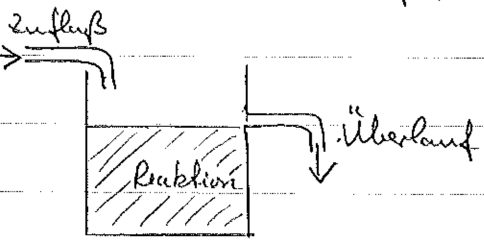
$$y' = \frac{Vy}{c+y} \qquad \text{(Michaelis-Menton-Differentialgl.)}$$

mit positiven Konstanten V und c ($V \hat{=}$ Maximalwert der Reaktionsgeschwindigkeit, $c \hat{=}$ Michaelis-Konstante). Tragen wir nämlich y' gegen y auf, so erhält man die Funktion

$$z = \frac{Vy}{c+y}$$



und $y' = z$ ist streng monoton wachsend zur Sättigungsgrenze V hin. Diese Reaktionsform tritt vor allem bei Modellen auf, bei denen ein konstanter Zulauf mit einem Überlauf gekoppelt ist



Mathematisch ist die Dgl rasch gelöst – es handelt sich um eine separierte Gleichung:

$$y'\frac{(c+y)}{y} = V \iff \frac{cy'}{y} + y' = V$$

$$\iff y(t) + c\ln y(t) = Vt + K,$$

welche man nicht explizit nach y – jedoch nach t auflösen kann

$$t(y) = \frac{1}{V}\left(K + y + \ln y^c\right).$$

Diese Differentialgleichung läßt sich auch mit der Methode des "Richtungsfeldes" gut diskutieren. Wir wollen dies an dieser Stelle als Beispiel behandeln.

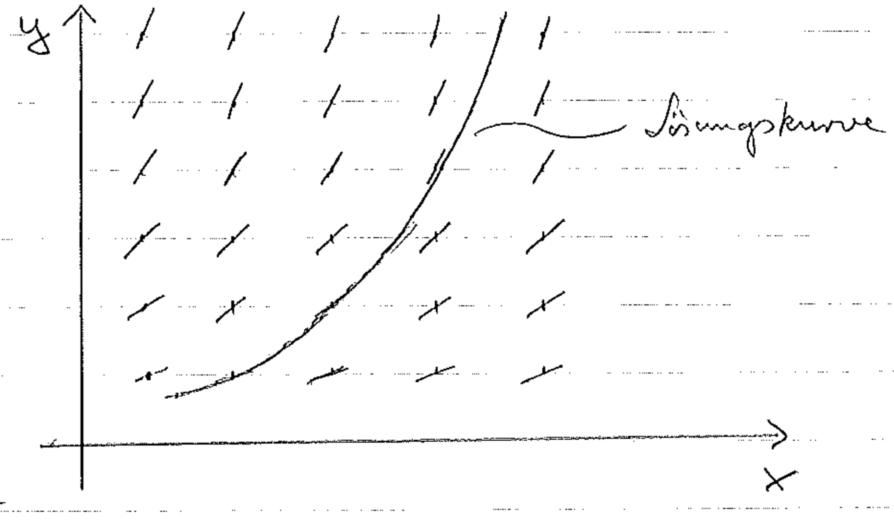
Gegeben sei eine explizite Differentialgleichung

$$y' = f(x,y).$$

Dies bedeutet geometrisch, daß in jedem Punkt (x,y) die Steigung (y') einer Lösungskurve $y(x)$ gegeben ist.
Man trägt in einem gerasterten Modell der Ebene diese Steigungen als kleine Geradenstückchen ein; in unserem Fall

$$y' = \frac{Vy}{c+y}$$

hängt y' garnicht explizit von x ab, weshalb man auf horizontalen Linien ($y = \text{const}$) stets die gleiche Steigung y' erhält. Beachten wir ferner, daß $\lim_{y\to\infty} y'(x,y) = V$ ist, so ergibt sich folgendes Bild



Eine Lösungskurve erhält man durch Entlanglaufen einer durch solche Geraden=stückchen zusammen=gesetzten Kurve in "differenzierbarer Weise – dh ohne Knicke zu bekommen. Lösungskurven sind also durch einen Startwert eindeutig bestimmt; die Kurve folgt dem vorgegebenen "Richtungsfeld.

Beispiel ④ Die logistische Gleichung

Die allgemeine Wachstums-Differentialgleichung ist – bei genauerem Hinsehen – für viele Modelle zu ungenau, ja schlichtweg falsch: Die Vermehrung kann beispielsweise nicht stets proportional zum Bestand sein,

$$y' \neq cy,$$

was einen exponentiellen Anstieg nach sich führt.
(Setzt man in einem Teich einige wenige, allesfressende Fische aus, so gibt es anfänglich sicher eine proportionale Vermehrungsrate – später fressen sich die Fische aber auch gegenseitig, wodurch ein entgegenwirkendes Element ins Spiel kommt; bedenken wir daß in jedem Teich nicht mehr Fische sein können als letztlich das Volumen des Gewässers aufnimmt, so läßt sich folgende Dgl gut verstehen:

$$y' = cy(k-y) \qquad \text{(logistische Differentialgleichung)}$$

Es handelt sich wieder um eine separierte Dgl. mit der Lösung

$$\frac{y'}{y(k-y)} = c \iff y'\left(\frac{1}{ky} + \frac{1}{k(k-y)}\right) = c$$

$$\iff y'\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{k-y}\right) = kc \iff \ln y - \ln(k-y) = kcx + K$$

$$\iff \ln\frac{y}{k-y} = kcx + K \iff \frac{y}{k-y} = \tilde{K}e^{kcx}$$

$$\iff y(1+\tilde{K}e^{kcx}) = k\tilde{K}e^{kcx} \iff y = \frac{k\tilde{K}e^{kcx}}{1+\tilde{K}e^{kcx}}$$

$$\iff y = \frac{k}{Ke^{-kcx}+1} \quad (\text{mit } K = 1/\tilde{K})$$

Für den Fall $y(0) = 0$ ist $\tilde{K} = 0$ und $y \equiv 0$ für alle x. Ansonsten gilt

$$y(0) = y_0 \neq 0 \iff k\tilde{K} = y_0 \iff K = \frac{k}{y_0}.$$

Da nun Ke^{-kcx} streng fällt, da $Ke^{-kcx} \to 0$ für $x \to \infty$ gilt, haben wir die Eigenschaften:
y wächst streng monoton gegen die Sättigungsgrenze k
Der Maximalwert der Reaktion = Maximalwert von y' ergibt sich aus der Bedingung

$$(y')'(x) = 0$$

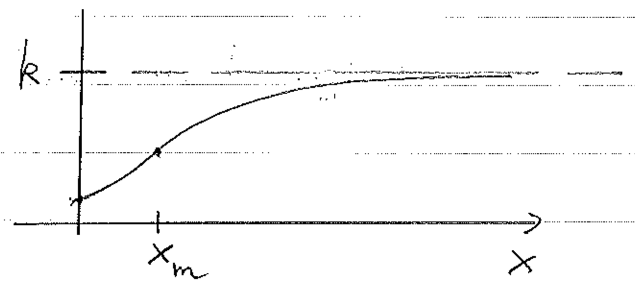
$$\iff \frac{d}{dx}\left(y(k-y)\right) = 0 \iff y'(k-y) - yy' = 0$$

$$\iff y'\{k-2y\} = 0 \iff y = k/2 \quad (\text{da } y' \neq 0 \text{ ist})$$

$$\iff \frac{1}{Ke^{-kcx}+1} = \frac{1}{2} \iff 1 = Ke^{-kcx} \iff e^{kcx} = K$$

$$\iff kcx = \log K \iff x_m = \frac{1}{kc}\log K$$

Aus $k > y_0$ folgt $K > 1$ und somit auch $x_m > 0$; man hat $y'(0) = cy_0(k-y_0) > 0$ und den Verlauf



Natürlich gibt es auch eine mathematische Lösung für $y_0 > k$: Dann ist zu beachten, daß $\int \frac{1}{k-y} = \log|k-y|$ ist und entsprechend aufzulösen. y fällt monoton gegen die Sättigungslinie.

Beispiel 5 Zustandsänderungen idealer Gase (Thermodynamik)
Ausgangspunkt sind folgende Grundgleichungen der Thermodynamik:

(1) Der 1. Hauptsatz der Thermodynamik

$$dU = dQ - p\,dV \quad \text{mit} \begin{cases} p\,dV \equiv \text{geleistete Arbeit } (p \text{ Druck}, V \text{ Vol.}) \\ dQ \equiv \text{Änderung der Wärmemenge} \\ dU \equiv \text{Änderung der "inneren" Energie} \end{cases}$$

(2) Die universelle Zustandsgleichung idealer Gase

$$pV = mRT \quad \text{mit} \begin{cases} m \equiv \text{Masse des Gases} \\ T \equiv \text{Temperatur} \\ R \equiv \text{universelle Gaskonstante.} \end{cases}$$

Weiterhin gilt

(3) Die innere Energie U hängt nur von T ab und zwar linear,

$$U = CT\,,\quad \text{also}\quad \frac{dU}{dT} = \frac{\partial U}{\partial T} = \text{const}$$

(4) Aus (1), (2) und (3) folgt hieraus, daß auch Q proportional zur Temperatur T ist,

$$Q = KT \quad \text{mit "Wärme-Kapazität" } K = K(p,V)\,,$$

(wobei allerdings p, V auch von T gemäß (2) abhängen).
Diese Proportionalitäten werden in der Thermodynamik feiner untersucht:
Def.: (Spezifische Wärmekapazitäten von Gasen)

(5) Bei konstantem Volumen ist also $(dV = 0)$ $dU = dQ \doteq dQ_V$.
Dann ist

$$c_V := \frac{1}{m}\frac{dQ_V}{dT} = \frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial T} = \text{const}$$

und heißt spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen

(6) Bei konstantem Druck (schreibe $dQ = dQ_p$) heißt

$$c_p := \frac{1}{m}\frac{dQ_p}{dT}$$

spezifische Wärmekapazität bei konst. Druck.

<u>Satz:</u> Es gilt: $\boxed{c_p = c_V + R}$

Man nennt übrigens $\varkappa := c_p/c_V$ <u>Adiabaten-Exponent.</u>

Beweis: Es ist mit (1) und (2)

$$mc_p = \frac{dQ}{dT}\Big|_{p=const} = \frac{d}{dT}(U + pV)\Big|_{p=const}$$

$$= \frac{\partial U}{\partial T} + p\frac{\partial V}{\partial T} = mc_V + p\cdot\frac{\partial V}{\partial T} = mc_V + mR.$$

① <u>Isotherme</u> Zustandsänderung ($\hat{=}\ T = const$).

Es ist demnach

$$p.V = mRT = const. \Rightarrow p = p(V) = \frac{c}{V}$$

Da T konstant ist, ist auch U konstant, also $dU = 0$, somit folgt aus (1)

$$dQ = p\,dV \Rightarrow Q(V) = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\,dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{c}{V}\,dV = c \ln V \Big|_{V_1}^{V_2}$$

$$= mRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = mRT \ln\left(p_1/p_2\right)$$

Die Kurven $p\cdot V = const$ heißen auch <u>Isothermen</u>

② Isochore Zustandsänderung ($\hat{=}\ V = const$)

Es ist demnach

$$p/T = mR/V = const, \quad p = mRT/V$$

Also haben wir $dU = dQ - p\,dV = dQ \Rightarrow dQ = dU = mc_V\,dT$

$$\Rightarrow Q = Q(T) = \int_{T_1}^{T_2} dQ = mc_V(T_2 - T_1) = c_V \cdot \frac{V}{R}(p_2 - p_1)$$

③ Isobare Zustandsänderung ($\hat{=}\ p = \text{const}$)
Dann ist

$$T/V = \text{const}, \quad V = \frac{mR}{p} T$$

aus $dQ = dU + p\,dV$ folgt $Q = Q(T)$ und

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} dU + p \int_{T_1}^{T_2} dV = mc_v (T_2 - T_1) + p \int_{T_1}^{T_2} \frac{mR}{p}\, dT$$

$$= mc_v (T_2 - T_1) + mR(T_2 - T_1) = mc_p (T_2 - T_1)$$

④ Adiabatische Zustandsänderung ($\hat{=}\ dQ = 0$, keine Wärmezu/abfuhr)
Dann ist

$$dU + p\,dV = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad mc_v\, dT + p\,dV = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad mc_v\, dT + mRT \frac{1}{V} dV = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} = 0, \quad \text{also } V = V(T)$$

$$\Longleftrightarrow \quad c_v \ln T = -R \ln V + K, \quad \text{das heißt}$$

$$c_v \ln(T_2/T_1) = -R \ln(V_2/V_1)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \ln T = \frac{-R}{c_v} \ln V + K \Longleftrightarrow T = \tilde{K} V^{-R/c_v}$$

$$\Longleftrightarrow \quad T = \tilde{K} V^{\frac{c_v - c_p}{c_v}} \Longleftrightarrow T = \tilde{K} V^{1-\varkappa}$$

Zusammen mit (2) erhalten wir hieraus

(a) $pV = mRT = mR\tilde{K}V^{1-\varkappa} \Longleftrightarrow pV^{\varkappa} = \text{const}$ (Adiabaten)

(b) $pV = mRT = p \cdot \tilde{\tilde{K}}\, T^{\frac{1}{1-\varkappa}} \Longleftrightarrow p \cdot T^{\frac{\varkappa}{1-\varkappa}} = \text{const}$

oder auch: $p^{1-\varkappa} V^{\varkappa} = \text{const}$, oder $\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{c_p - c_v}{c_p}}$ (Poisson-Gleichung)

<u>Bemerkung</u> In der Praxis verlaufen manche Prozesse weder rein isotherm noch rein adiabatisch (wegen mangelnder Isolierungen). Die Verlaufskurven zwischen p und V zu einem Parameter T sind dann weder

- Isotherme, $pV = c$
- Adiabaten, $pV^{\varkappa} = c$;

sie verlaufen sozusagen dazwischen; $pV^{\alpha} = \text{const}$ mit $1 \leq \alpha \leq \varkappa$ („Polytrope Zustandsänderung").

<u>Beispiel ⑥ Der Gravitationskollaps</u>

Wir nehmen an, daß eine kugelförmig verteilte Masse der konstanten Dichte ρ, Radius R_0, sich – durch inneren Druck – bis zur Zeit $t=0$ im Gleichgewicht befindet. Zur Zeit $t=0$ sei dieser Druck verschwunden (z.B. durch Beendigung der thermo-nuklearen Reaktortätigkeit des Sterns). Dann kontrahiert diese Masse infolge der zentral wirkenden Gravitation.

Auf diese Weise entstehen (i.w.) Neutronensterne, Weiße Zwerge, schwarze Löcher und Pulsare. Ist z.B.

$$2\, M_{\text{Sonne}} \leq M \leq 10\, M_{\text{Sonne}},$$

so entsteht gewöhnlich ein Neutronenstern, Radius $10^3 - 10^4$ m (!), eine winzige Kugel gigantischer Masse (ungeheurer Dichte). Wir wollen diesen Schrumpfungsprozeß (vereinfacht) beschreiben, indem wir den Weg (= Fall) eines an der Oberfläche befindlichen Teilchens zum Zentrum hin berechnen:

Ist $r(t)$ die radiale Entfernung eines Teilchens der Oberfläche (Masse m) zum Zentrum zur Zeit t, und wirkt – wie gesagt – nur die zum Zentrum weisende Gravitationskraft, so gilt (unter Annahme des Newton'schen Bewegungsgesetzes)

$$\underbrace{m\frac{d^2r}{dt^2}}_{\text{Newton'sche Trägh. kraft}} = \underbrace{-\gamma M m \frac{1}{r^2(t)}}_{\text{Gravitationskraft}} \qquad (\gamma \equiv \text{Gravitationskonstante}) \quad (M \equiv \text{Gesamtmasse des Systems})$$

$$\Longleftrightarrow \quad \ddot{r} = -\gamma M \frac{1}{r^2}$$

Diese Dgl 2. Ordnung kann nun mit der Energie-Methode sofort einmal integriert werden (vermöge Multiplikation mit $\dot{r}$):

$$\dot{r}\ddot{r} = -\gamma M \frac{\dot{r}}{r^2} \Longleftrightarrow \boxed{\frac{1}{2}(\dot{r})^2 - \gamma M \frac{1}{r} =: c} \quad \text{Energie-Satz}$$

Wir bestimmen die Konstante c durch die Anfangsbedingung
$t=0 \Rightarrow \dot{r} \overset{!}{=} 0$ und $r(0) \overset{!}{=} R_0 \quad \Longrightarrow \quad c = -\gamma \, M/R_0$

$$\Longrightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \dot{r} = \pm\sqrt{2M\gamma\left(\frac{1}{r(t)} - \frac{1}{R_0}\right)} \,. \qquad (\text{Separierte Dgl})$$

Das Vorzeichen muß „–" sein, da $r(0)=R_0$ und $r(t)$ ist fallend. (also $\dot{r}<0$)

$$-\frac{\frac{dr}{dt}}{\sqrt{2M\gamma\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0}\right)}} = 1 \;. \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2M\gamma}} \cdot \frac{\sqrt{R_0}\cdot\sqrt{r}}{\sqrt{R_0 - r}} \frac{dr}{dt} = 1$$

Zur Bequemlichkeit des Lesers führen wir die Integration explizit aus

(NR) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{R-r}}\,dr$; setze $t = \sqrt{R-r}$, $r = R - t^2$, $dr = -2t\,dt$

$$\rightsquigarrow \int \frac{\sqrt{R-t^2}}{t} \cdot -2t \, dt = -2 \int \sqrt{R-t^2} \, dt .$$

mit $t = s\sqrt{R}$ ergibt sich das Grundintegral

$$-2\sqrt{R}\cdot\sqrt{R}\int\sqrt{1-s^2}\,ds = -2R\int\sqrt{1-s^2}\,ds \quad ,$$ welches man

mittels trigonometrischer Substitution (oder partiell mit Faktor 1) löst:

$$= -2R\left\{\frac{1}{2}s\sqrt{1-s^2} + \frac{1}{2}\arcsin s\right\}$$

$$= -R\left\{\frac{t}{\sqrt{R}}\sqrt{1-\frac{t^2}{R}} + \arcsin\frac{t}{\sqrt{R}}\right\}$$

$$= -R\left\{\sqrt{R-r}\cdot\frac{1}{\sqrt{R}}\sqrt{1-\frac{R-r}{R}} + \arcsin\sqrt{\frac{R-r}{R}}\right.$$

$$= -R\left\{\sqrt{R-r}\cdot\frac{1}{R}\cdot\sqrt{r} + \arcsin\sqrt{1-r/R}\right\}$$

$$= -\sqrt{r(R-r)} - R\arcsin\sqrt{1-r/R}$$

$$= -\sqrt{r(R-r)} - R\arccos\sqrt{\frac{r}{R}} \; .$$

Dies ist die gewünschte Stammfunktion der Nebenrechnung.
Man erhält also als implizite Lösung der Dgl

$$\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{2My}}\left\{\sqrt{r(R-r)} + R\arccos\sqrt{\frac{r}{R}}\right\} = t + c$$

Für $t=0$ ist $r=R$, woraus $c=0$ folgt.
Wenn auch diese Gleichung

$$F(r) = t$$

nicht explizit nach r aufgelöst werden kann, so kann

doch zum Beispiel folgende interessante Frage beantwortet werden: Nach welcher Zeit ($T_{Kollaps}$) ist $r(T) = 0$? Anschaulich heißt dies: Wann ist das System zu einem einzigen Punkt (theoretisch) kollabiert.
Hierzu muß man nur $r = 0$ setzen und t ausrechnen:

$$r = 0 \Rightarrow t = T_{Kollaps} = \frac{R^{3/2}}{\sqrt{2M\gamma}} \underbrace{\arccos(0)}_{=\pi/2} = \frac{\pi R}{2}\sqrt{\frac{R}{2M\gamma}} \; !$$

Für gegebene Radien samt (gleichdicht verteilter) gegebener Gesamtmasse läßt sich diese Zeit also bestimmen.

Beispiel: Sonne: $t_{Kollaps} \approx 1$ Stunde

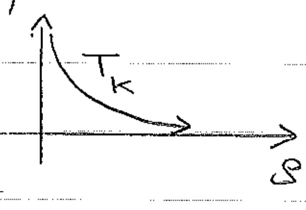
Galaxis: $t_{Kollaps} \gtrsim 100$ Millionen Jahre

Man kann übrigens die Zeit $t_{Kollaps}$ auch durch eine Dichte ausdrücken: Wegen

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3 \iff R^{3/2} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \cdot M^{1/2} \cdot \sqrt{\frac{3}{4\pi}}$$

folgt: $t_K = \frac{\pi}{2} R^{3/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{M}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} = \sqrt{\frac{3\pi}{8\gamma}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho}} =: \boxed{c \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho}} = T_{Kollaps}}$

Folgerung: Die Zeit $T_{Kollaps}$ hängt ausschließlich von der Dichte ρ ab, $T_K = \frac{c}{\sqrt{\rho}}$



ein interessantes Ergebnis, für manche modellhafte Rechnung ist nämlich nicht die Gesamtmasse bekannt, sondern eher eine Dichte (wie z.B. in Galaxien).

Beispiel 7 (Ein/Ausschaltvorgang in der E-Technik

Gegeben ist ein Gleichstrom-Kreis mit Spule (Selbstinduktion L) und Ohm'schen Widerstand (R). Eine Spannungsquelle der Größe U sei vorhanden. Aus der Bilanz

$$\sum \text{Spannungen} = 0$$

folgt die Differentialgleichung

$$U - L\frac{dI}{dt} = RI$$

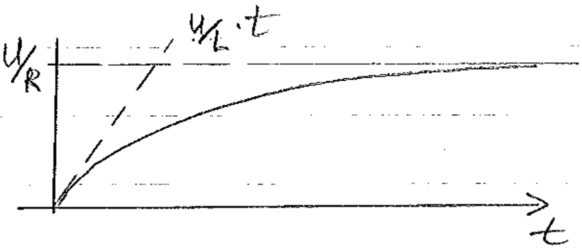
$$\Longleftrightarrow \quad \dot{I} + R/L\, I = U/L,$$

welches eine Gleichung allereinfachster Art darstellt: linear, 1. Ordnung konstante Koeffizienten und Inhomogenität. Die Lösungsgesamtheit ist

$$I(t) = ce^{-R/L\,t} + \frac{U}{R} \quad (c \in \mathbb{R})$$

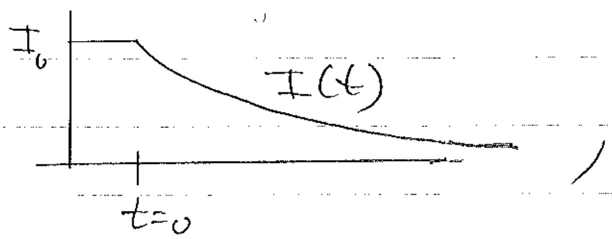
Beim Einschaltvorgang ist $I(0) = 0$, also $c = -\frac{U}{R}$

$$\Longrightarrow \quad I(t) = \frac{U}{R}(1 - e^{-R/L\,t})$$



Der Anstieg in $t=0$ ist $\dot{I}(0) = U/L$, also unabhängig von R.
Je größer L ist, umso länger dauert das Anwachsen von I bis zur Sättigungsgrenze U/R. Beim Ausschaltvorgang haben wir wegen $U=0$ die Dgl

$$-L\dot{I} = IR,$$

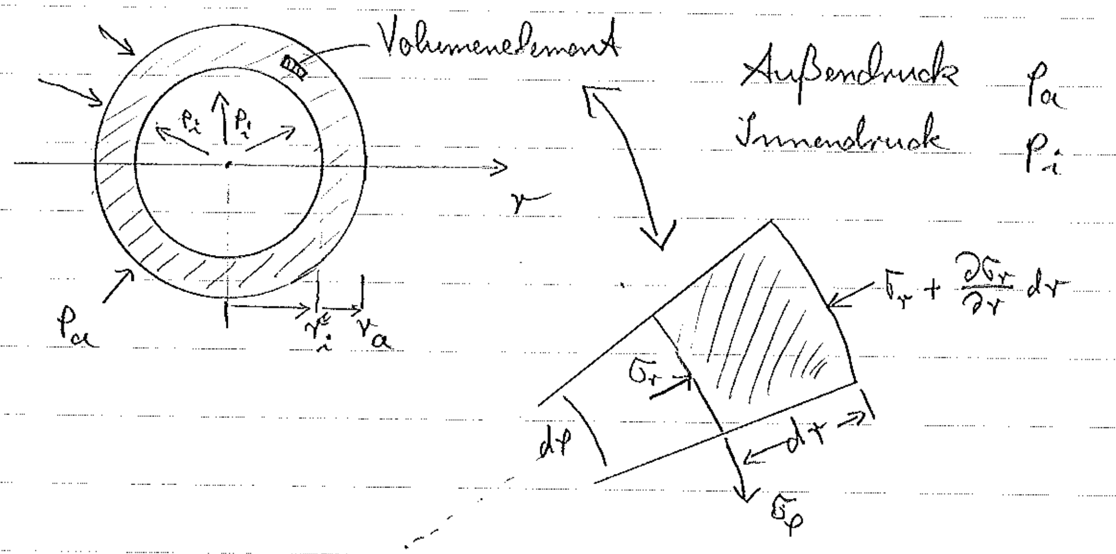


mit der Lösung $I(t) = I_0 e^{-R/L\,t}$
hierbei beträgt die Energie-Entwicklung im Widerstand

$$E = \int_0^\infty I^2 R\, dt = I_0^2 L/2 \quad .$$

Beispiel 8 (Spannungsberechnung im Apparatebau)

Aufgabe ist es, elastische Hauptspannungen eines dickwandigen Hohlzylinders zu berechnen. Wir stellen uns einen zylindrischen Behälter vor, der unter Innen- und Außendruck steht



Greift man sich ein Volumenelement der Querschnittsfläche heraus, so zeigt eine kurze Kräftebilanz, daß die Spannungsgleichung

$$\sigma_\varphi + \sigma_r + r\frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \qquad (1)$$

am Orte r gilt. Hierbei ist $\sigma_r = \sigma_r(r)$ die Radialspannung und $\sigma_\varphi = \sigma_\varphi(r)$ die Tangentialspannung.
Ist nun $w = w(r)$ die Verschiebung des Volumenelementes (in Radialrichtung), so gilt für die Dehnungen

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{dw}{dr} = -\frac{\sigma_r}{E} - \frac{\nu\sigma_\varphi}{E} \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{w}{r} = \frac{\sigma_\varphi}{E} + \frac{\nu\sigma_r}{E} \end{aligned}\right\} \text{ Hooke'sches Gesetz;}$$

Hierbei ist E der Elastizitätsmodul und ν die Querkontraktion.
Hieraus folgen leicht die beiden Gleichungen (2) und (3)

$$\sigma_r = \frac{E}{\nu^2-1}\left(\frac{dw}{dr} + \nu\frac{w}{r}\right) \quad \text{und} \quad \sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\nu\frac{dw}{dr} + \frac{w}{r}\right).$$

Setzen wir dies in (1) ein, so folgt

$$\frac{E}{1-\nu^2}\left\{\nu\frac{dw}{dr}+\frac{w}{r}-\frac{dw}{dr}-\nu\frac{w}{r}-r\frac{d^2w}{dr^2}-\nu\frac{dw}{dr}+\nu r\frac{w}{r^2}\right\}=0$$

$$\Longleftrightarrow\quad r^2\frac{d^2w}{dr^2}+r\frac{dw}{dr}-w=0 \qquad (4)$$

Gleichung (4) ist eine lineare Dgl. 2. Ordnung mit nicht-konstanten Koefficienten – allerdings eine, die wir kennen, nämlich die Euler-Dgl (§10). Sie hat die allgemeine Lösung

$$w(t)=At+B\frac{1}{t} \qquad \text{mit } A,B\in\mathbb{R}. \qquad (5)$$

Die Konstanten A und B bestimmen wir aus der Randbedingung

$$\sigma_r(r_i)=-p_i \quad \text{und} \quad \sigma_r(r_a)=-p_a \qquad (6)$$

Setzt man (5) in (2) ein und beachtet (6), so folgt

$$A=\frac{\nu-1}{E}\,\frac{r_i^2p_i-r_a^2p_a}{r_i^2-r_a^2},\quad B=\frac{\nu+1}{E}\,\frac{r_i^2r_a^2(p_i-p_a)}{r_a^2-r_i^2}.$$

Nun kann man dies wiederum in (2) und (3) einsetzen und erhält

$$\sigma_r(r)=\frac{1}{r_a^2-r_i^2}\left[p_ir_i^2-p_ar_a^2+(p_a-p_i)\frac{r_i^2r_a^2}{r^2}\right] \qquad (2')$$

$$\sigma_\varphi(r)=\frac{1}{r_a^2-r_i^2}\left[p_ir_i^2-p_ar_a^2-(p_a-p_i)\frac{r_i^2r_a^2}{r^2}\right]. \qquad (3')$$

Sonderfälle (Innendruck, $p_a=0$): $\sigma_r=-p_i\dfrac{(r_a/r)^2-1}{(r_a/r_i)^2-1}$

$$\sigma_\varphi=p_i\frac{(r_a/r)^2+1}{(r_a/r_i)^2-1}$$

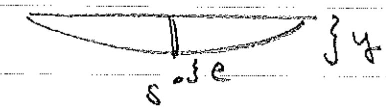
Außendruck, $p_i=0$: $\sigma_r=-p_a\dfrac{1-(r_i/r)^2}{1-(r_i/r_a)^2}$

$$\sigma_\varphi=-p_a\frac{1+(r_i/r)^2}{1-(r_i/r_a)^2}.$$

Beispiel 9 (Zur Schwingungsdynamik)

Auf einer horizontal liegenden Turbinenwelle ist eine Scheibe befestigt. Wenn ihr Schwerpunkt S nicht auf der Wellenachse liegt, so erfährt die Welle während einer Drehung eine Durchbiegung y. Diese genügt der Differentialgleichung

$$\ddot{y} + \left(\frac{1}{m\alpha} - \omega^2\right) y = g \cos \omega t + e\omega^2 ,$$



wobei m die Masse der Scheibe ist, α eine Konstante (abhängig von der Länge der Welle), ω die Winkelgeschwindigkeit der Welle und e die Exzentrizität des Scheibenschwerpunktes. Gesucht ist die allgemeine Lösung der Dgl. (welche übrigens ihrerseits aus dem Newton'schen Kraftgesetz ($m\ddot{y} = \sum$ Kräfte) folgt).

Es handelt sich um eine inhomogene lineare Dgl 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

$$\lambda^2 + \left(\frac{1}{m\alpha} - \omega^2\right) = 0 \iff \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\omega^2 - \frac{1}{m\alpha}}$$

(I) Im Fall $\omega^2 < \frac{1}{m\alpha}$ ist $\lambda_{1,2} = i\alpha$, also $y_{hom} = C_1 \cos \alpha t + C_2 \sin \alpha t$

(II) Im Fall $\omega^2 > \frac{1}{m\alpha}$ ist $\lambda_{1,2}$ reell, also $y_{hom} = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$.

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung erhalten wir durch den Ansatz:

$$y_{sp}(t) = A \cos \omega t + B$$

$$\Rightarrow -A\omega^2 \cos \omega t + \left(\frac{1}{m\alpha} - \omega^2\right)(A \cos \omega t + B) = g \cos \omega t + e\omega^2 ,$$

woraus sofort folgt

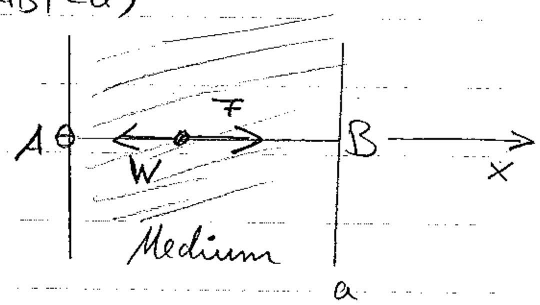
$$A\left(\frac{1}{m\alpha}-2\omega^2\right)=g \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{m\alpha}-\omega^2\right)B = e\omega^2$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = y_{hom}(t) + \left(\frac{g}{\frac{1}{m\alpha}-2\omega^2}\right)\cos\omega t + \frac{e\omega^2}{\frac{1}{m\alpha}-\omega^2}$$

ist (in I und II) die allgemeine Lösung.

Beispiel 10 (Bewegung, Kraftgesetz)

Ein Punkt der Masse m bewegt sich entlang einer Geraden AB unter der Wirkung einer konstanten Kraft F. Die Widerstands=kraft W des Mediums sei proportional zum Abstand des Massenpunktes vom Punkt B und im Anfangszeitpunkt (in A also) gleich f (mit $f < F$). Die Anfangsgeschwindigkeit sei $V_0 = 0$. Wie lange bewegt er sich von A nach B ($|AB| = a$)



Es ist $W = c(a-x)$,
nach Voraussetzung. Wegen
$W(0) = f = ca$ folgt $c = f/a$.
Wir haben die Kräftebilanz

$$m\ddot{x} + f/a\,(a-x) = F$$

$$\Leftrightarrow \quad m\ddot{x} - \frac{f}{a}x = F - f$$

Es ist $x_{hom} = c_1 e^{\sqrt{\frac{f}{ma}}\,t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{f}{ma}}\,t}$

und $x_{sp} = K \quad \Leftrightarrow \quad K = \frac{(f-F)a}{f}$

$$\Rightarrow \quad x(t) = C_1 e^{\sqrt{\frac{f}{ma}}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{f}{ma}}\,t} + \frac{a}{f}(f-F)$$

ist die allgemeine Lösung. Mit $x(0)=0$ und $\dot{x}(0)=0$ folgt

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2 &= \frac{a}{f}(F-f) \\ \sqrt{\frac{f}{ma}}\cdot C_1 - \sqrt{\frac{f}{ma}}\cdot C_2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{a}{2f}(F-$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{a}{f}(F-f)\cdot\cosh\sqrt{\frac{f}{ma}}\,t + \frac{a}{f}(f-F) .$$

Um die fragliche Bewegungsdauer zu berechnen, fordern wir $x(t) \overset{!}{=} a$ und erhalten die Gleichung

$$a = \frac{a}{f}(F-f)\cosh\sqrt{\frac{f}{ma}}\,t + a - aF/f$$

$$\Leftrightarrow \quad F = (F-f)\cosh\sqrt{\frac{f}{ma}}\,t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{F}{F-f} = \cosh\sqrt{\frac{f}{ma}}\,t$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{f}{ma}}\,t = \operatorname{arcosh}\left(\frac{F}{F-f}\right) \Rightarrow t_{end} = \sqrt{\frac{ma}{f}}\,\operatorname{arcosh}\left(\frac{F}{F-f}\right)$$

Mittels der Formel $\operatorname{arcosh} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$ mit $x = \frac{F}{F-f} > 1$ erhält man

$$t_{end} = \sqrt{\frac{ma}{f}}\,\ln\left(\frac{F}{F-f} + \sqrt{\frac{F^2}{(F-f)^2} - 1}\right) = \sqrt{\frac{ma}{f}}\,\ln\left(\frac{F+\sqrt{2Ff-f^2}}{F-f}\right).$$

Dieses Ergebnis hätten wir auch erhalten, wenn wir die Lösung $x(t)$ in der Form

$$x(t) = \frac{a}{2f}(F-f)\left\{e^{\sqrt{\frac{f}{ma}}\,t} + \frac{1}{e^{\sqrt{\frac{f}{ma}}\,t}}\right\} + \frac{a}{f}(f-F)$$

geschrieben hätten, $x(t)=a$ gesetzt hätten, die Gleichung nach $e^{\sqrt{\frac{f}{ma}}\,t}$ aufgelöst hätten und anschließend logarithmiert hätten.

Beispiel 11 (Wärmeaustausch)

Ein Körper der Temperatur T_0 wird in ein Medium der (tieferen) Temperatur T_1 getaucht. Dann gelte folgendes Gesetz: Die Temperatur des Körpers zur Zeit t sei $T(t)$; dann sei die Änderungsrate dieser Temperatur proportional zur noch bestehenden Temperatur-Differenz.
Ferner gelte die Annahme, daß T_1 (annähernd konstant bleibt (weil z.B. Medium sehr groß ist; z.B. werfe heißes Eisen ins Meer). Aufgabe: Bestimme den Temperaturverlauf.

$$\frac{d}{dt} T(t) = c(T_1 - T) \quad ; \quad T(0) = T_0$$

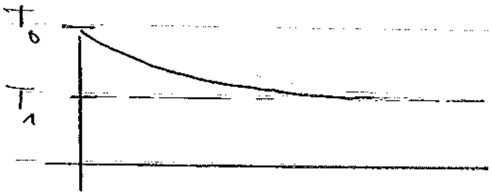
(weil $T' < 0$ sein muß).

$$\Rightarrow \frac{\dot{T}}{T_1 - T} = c \Rightarrow -\ln|T_1 - T| = ct + d$$

$$\Leftrightarrow \quad (T - T_1) = Ke^{-ct} \Leftrightarrow T = T_1 + Ke^{-ct}$$

Mit $T(0) = T_0$ folgt $K = T_0 - T_1$, also

$$T(t) = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-ct}$$



Übrigens: es ist $T'_{max} = T'(0) = c(T_1 - T_0)$;
das heißt, daß die Temperaturabnahme beim Eintauchbeginn maximal ist.
Ist dagegen $T_1 \neq$ const, $T_1 = T_1(t)$ so haben wir die Dgl

$$\dot{T} + cT = T_1(t),$$

eine inhomogene lineare Dgl.

§6 Bernoulli-, Riccati- und Abelsche Dgl'n

Bei diesen drei Typen handelt es sich um Dgl'n

$$y' = f(x,y),$$

für welche $f(x,y)$ ein Polynom in y ist

$$f(x,y) = \sum_{j=0}^{m} P_j(x)\, y^j \qquad (m \geq 0)$$

mit (hinreichend glatten) Koeffizientenfunktionen $P_j(x)$ ist. Listet man nach wachsenden Gradzahlen von m, ergibt sich:

$m = 0$:	$y' = P_0$	(Integration)
$m = 1$:	$y' = P_1 y + P_0$	(lin. Dgl. 1. Ord.)
$m = 2$:	$y' = P_2 y^2 + P_1 y + P_0$	(Riccati-Dgl)
$m = 3$:	$y' = P_3 y^3 + P_2 y^2 + P_1 y + P_0$	(Abel-Dgl.)

Desweiteren ergibt sich noch ein Sondertypus: Falls das "Absolutglied P_0" fehlt wie auch alle Zwischen-terme, so heißt

$$y' = P y^m + Q y \qquad \text{Bernoulli-Dgl. } m\text{-ten Grades}$$

wobei interessanterweise hier auch $m \in \mathbb{Z}$ sein kann. Bernoulli-Dgl'n können methodisch gelöst werden – Riccati- und Abelsche Gleichungen dagegen i.a. nicht.

Teil A Bernoulli-Dgl

Gegeben sei für ein $m \in \mathbb{R}$ $(m \neq 0,1)$ die Gleichung

(A1) $y' = Py^m + Qy$ (Bernoulli Dgl. m-ten Grades, wenn $m \in \mathbb{N}$)

mit in $-\infty \leq a < b \leq \infty$ stetigen Funktionen P, Q.
Gelegentlich findet man die dazu offenbar äquivalente Form

(A1*) $y'(x) + g(x)y(x) + h(x)y^m(x) = 0$

welcher wir hier nicht den Vorzug geben

Theorem I (Bernoulli-Dgl-Theorem)

y erfüllt die Bernoulli-Dgl (A1)

$\Longleftrightarrow z := y^{1-m}$ erfüllt die lin. Dgl 1. Ordnung

$$z' = (1-m)Qz + (1-m)P \qquad (*)$$

und kann somit methodisch vollständig gelöst werden

Beweis: $z' = (1-m)y^{-m} \cdot y' = (1-m)y^{-m}(Py^m + Qy)$

$= (1-m)P + (1-m)Qy^{1-m} = (1-m)P + (1-m)Qz$

Beispiel: $y' = xy^2 + y \rightsquigarrow z = 1/y$ liefert $z' + z = -x$

$\Longleftrightarrow z = -x + 1 + ke^{-x} \rightsquigarrow y = 1/z = \dfrac{1}{1 - x + ke^{-x}}$

(*) $m = 2$ $z' = -Qz - P$

$\boxed{\text{Teil B}}$ Riccati-Dgl'n

Um Indizierungen zu vermeiden, schreiben wir die allgemeine Form der Riccati-Dgl so

(B1) $\quad y' = Py^2 + Qy + R$

mit stetigen Funktionen $P(x)$, $Q(x)$ und $R(x)$, welche allesamt auf einem Intervall $-\infty \leq a < b \leq \infty$ definiert sein mögen.

Wie bereits erwähnt läßt sich zeigen, daß es methodische analytische Verfahren zwar nicht gibt – hingegen gibt es interessante Reduktionsverfahren im Falle "zufällig gefundener" speziellen Lösungen.

Wir zeigen in diesem Abschnitt

- Reduktionsverfahren
- Zusammenhänge zu Dgl'n 2ter Ordnung, welche sich mittels der "Riccati-Transformation" ergeben.

Kurz und voraussehend formuliert strukturieren die "Reduktionsverfahren" die Ermittlung der allgemeinen Lösung (mit y bezeichnet) wie folgt.

* Ist eine Lösung u bekannt, so erfüllt $z = y - u$ eine Bernoulli-Dgl 2. Grades. (Das heißt also, daß $1/z$ eine lineare Dgl erfüllt)

* Sind sogar 2 Lösungen u und v bekannt, so ergibt sich die allgemeine Lösung bereits aus einer Integration

* Sind schließlich 3 spezielle Lösungen u, v und w bekannt, so berechnet sich die allgemeine Lös-g y aus einer simplen Formel mit reellen Parameter, nämlich

$$\frac{(y-u)}{(y-v)}\frac{(u-w)}{(w-w)} = c = \text{Konstant.}$$

$W-V$, u

$$\frac{(y-u)(v-w)}{y-v\ (u-w)}$$

Theorem II (Riccati-Theorem)

(a) Sei u Lösung von (B1). Dann gilt

$$y' = Py^2 + Qy + R \iff z := y-u \text{ löst}$$

$$z' = Pz^2 + (Q+2Pu)z \quad (\text{Bernoulli-Dgl, Grad } 2)$$

Folgerung: Die allgemeine Lösung y von (B1) erhält man mittels der Transformation $s = 1/z \iff y = u + 1/s$ und

$$s'(x) = -(Q+2Pu)s - P \quad (\text{inhom. lin. Dgl})$$

(b) Sind $u \neq v$ zwei Lösungen von (B1). Dann gilt

$$y' = Py^2 + Qy + R \iff \frac{y-u}{y-v} = Ke^{\int P(u-v)} \quad (K \in \mathbb{R}$$

(c) Sind u, v, w drei (versch.) Lös-gen von (B1), so gilt

$$y' = Py^2 + Qy + R \iff \frac{y-u}{y-v}\,\frac{w-v}{w-u} = \text{const.}$$

Dies drückt man auch so aus:

$\left\{ \text{"Das Doppelverhältnis von 4 Lösungen der Riccati-Gleichung ist konstant"} \right\}$

Beweis: (a) Sei u irgendeine (spezielle) Lösung von (1),

$$\left.\begin{aligned} u' &= Pu^2 + Qu + R \\ y' &= Py^2 + Qy + R \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow z = y - u \text{ erfüllt}$$

$$(y-u)' = P(y^2 - u^2) + Q(y-u) = P(y-u)(y+u) + Q(y-u)$$

$$\Longleftrightarrow \quad z' = P(z)(z+2u) + Qz = Pz^2 + (Q+2uP)z$$

Das ist die angegebene Bernoulli-Dgl 2. Grades für z. Nach dem Theorem I (Bernoulli-Thm) löst dann $S = 1/z$ die inhomogene lineare Dgl.

$$S'(x) + (Q + 2uP)S = -P$$

womit Teil a) bewiesen ist. Teil b) folgt so: Wie in a) gesehen, folgen für die Differenzen $y-u$ und $y-v$ die beiden Gleichungen

$$(y-u)' = P(y-u)(y+u) + Q(y-u)$$
$$(y-v)' = P(y-v)(y+v) + Q(y-v)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{(y-u)'}{y-u} = P(y+u) + Q \quad \text{und} \quad \frac{(y-v)'}{y-v} = P(y+v) + Q$$

Bei erneuter Differenzbildung, fällt a weg, also

$$\frac{(y-u)'}{y-u} - \frac{(y-v)'}{y-v} = P((y+u)-(y+v)) = P(v-u)$$

Dies ist aber eine simple separierte Dgl für y, deren Integration ergibt:

$$\log(y-u) - \log(y-v) = \int P(u-v) + C$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{y-u}{y-v} = Ke^{\int P(u-v)} \qquad K \in \mathbb{R}$$

Zu (c): Ist nun w eine dritte Lösung, so gilt nach b:

$$(i) \qquad \frac{w-u}{w-v} = \tilde{K}e^{\int P(u-v)} \qquad \tilde{K} \in \mathbb{R}$$

sowie ebenfalls nach b für eine (allgemeine) Lösung y(x) die entsprechende Gleichung

$$(ii) \qquad \frac{y-u}{y-v} = Ke^{\int P(u-v)} \qquad K \in \mathbb{R}$$

Bildet man den Quotienten ii)/i), so bleibt auf der rechten Seite nur die Konstante $K/\tilde{K}$ und das Theorem ist bewiesen.

<u>Beispiel 1:</u> $y' = xy^2 + (1-2x)y + x - 1$

Durch Probieren: $u(x) \equiv 1$ ist eine Lösung $\Rightarrow y - 1 = z$ erfüllt die Bernoulli-Dgl:

$$z' = xz^2 + \{(1-2x) + 2x\cdot 1\}z = xz^2 + z$$

$z \equiv 0$ ist singuläre Lösung. Ansonsten sei $s = 1/z$. Dann:

$$z' = (1/s)' = -\frac{1}{s^2}s' = \frac{x}{s^2} + 1/s \iff s' = -s - x$$

und diese einfache Gleichung hat die allg. Lösung
$s = -x + 1 + Ke^{-x} \Rightarrow y = 1 + 1/s = 1 + \frac{1}{-x+1+Ke^{-x}}$

Wobei hier die gefundene Lösung $u = y \equiv 1$ nicht in der Schar enthalten ist (singuläre Lösung, $\iff z \equiv 0$)

<u>Beispiel 2:</u> $y' = x^3(y-x)^2 + y/x$.

Hier ist $u = x$ eine Lösung. Ist dann $y - x = z$, so gilt

$$y' = z' + 1 = x^3z^2 + \frac{z+x}{x} \iff z' = x^3z^2 + z$$

Auch diese Bernoulli-Dgl wird mit $z = 1/s$ zu einer linearen Dgl:

$$z' = -1/s^2 \cdot s' = x^3 \cdot \frac{1}{s^2} + 1/s \iff s' = -s - x^3$$

mit der Lösung $s = Ke^{-x} - x^3 + 3x^2 - 6x + 6$

§6neu/8

Theorem III (Riccati-Transformation)

Zur Riccati-Dgl $y' = Py^2 + Qy + R$ heißt eine Funktion $w(x)$ mit

$$y(x) = -\frac{w'(x)}{w(x)} \cdot \frac{1}{P(x)}$$ Riccati transformation zu $y(x)$

Dann sind äquivalent

y löst Riccati-Dgl $\Longleftrightarrow$ w löst die lineare homogene Dgl 2^{ter} Ordnung

$$\boxed{w'' - \left\{\frac{P'}{P} + Q\right\} w' + PRw = 0}$$

Beweis: Es ist $w'/w = -Py$ $\left(\overset{\text{unnötig}}{\Longleftrightarrow} w = Ke^{-\int Py\,dx}\right)$

Nun folgt aus $w' = -Pyw$ auch durch Differenzieren

$$w'' = -P'yw - Py'w - Pyw' \overset{\text{umstellen}}{\Longleftrightarrow} y' = \frac{1}{Pw}\{-w'' - P'yw - Pyw'\}$$

$$\underset{\text{Riccati}}{\overset{\text{Vor.}}{=}} P\left(\frac{w'}{w}\frac{1}{P}\right)^2 - \frac{Q}{P}\frac{w'}{w} + R \quad \text{———} \;!$$

$$\Longleftrightarrow -w'' - P'y\,w - Pyw' = \frac{w'^2}{w} - Qw' + PRw \qquad \Big|\; y = -\frac{w'}{w}\frac{1}{P} \text{ einsetzen}$$

$$\Longleftrightarrow -w'' + \frac{P'}{P}w' + \frac{w'^2}{w} = \frac{w'^2}{w} - Qw' + PRw$$

$$\Longleftrightarrow w'' - \left\{\frac{P'}{P} + Q\right\} w' + PRw = 0$$ q.e.d.

Beisp.: $y' = e^{-x}y^2 + y + e^{x}$ (Riccati)

$$\rightsquigarrow w'' - \{-1 + 1\} w' + 1w = w'' + w = 0 \;\checkmark$$

$w = A\sin x + B\cos x \Rightarrow y = -w'/w \cdot e^{x}$ $\Longleftrightarrow$ nur "1" freie Konstante

Die Abelsche Differentialgleichung (1. Art)

Nach Niels Abel sind mehrere Typen von Dgl'n benannt – insbesondere stellt die sog. Abelsche Dgl. 1. Art

(*) $$\boxed{y'(x) = f_3(x) \cdot y^3(x) + f_2(x)\, y^2(x) + f_1(x)\, y(x) + f_0(x)}$$

eine gewisse Verallgemeinerung der Riccati-Gleichung (nämlich mit $f_3 \equiv 0$) dar. Gleichwohl stellt die Riccati=Gleichung methodisch keinen Spezialfall der Abel'schen Gleichung dar (was später klar wird)

Genau genommen gibt es -3- unterschiedliche Manipulationen, unter denen die allgemeine Gleichung (*) diverse Vereinfachungen erfährt – ohne daß dabei im Ergebnis eine methodisch zu gewinnende Lösung erreicht wird. Dennoch liefern die Vereinfachungsstrategien erst einmal die Grundlage neuer Ansätze. Bei den 3 Manipulationen handelt es sich um

(i) Translation: $z(x) := y(x) + a(x)$ mit geeignetem $a(x)$
ii) Faktorisierung: $z(x) = w(x)\, y(x)$ bzw. $y(x) = w(x) \cdot z(x)$
iii) Substitution der Variablen x

Lemma 1: Durch die Translation $z(x) := y(x) + a(x)$ mit $a(x) = f_2/3f_3$ wird die Dgl "quadratfrei" i.e.

y löst (*) $\Longleftrightarrow$ z löst die Abel'sche Dgl

(**) $$\boxed{z' = g_3 z^3 + g_1 z + g_0}$$

mit neuen Koeffizienten g_0, g_1 und g_3 (vgl. Bem.)

<u>Beweis:</u> Es gilt ganz einfach mit $y = z - a$

$$y^2 = z^2 - 2az + a^2 \quad \text{und} \quad y^3 = z^3 - 3az^2 + 3a^2z - a^3$$

$$y' = z' - a' \overset{(*)}{=} f_3y^3 + f_2y^2 + f_1y + f_0 \iff$$

$$z' = f_3(z^3 - 3az^2 + 3a^2z - a^3) + f_2(z^2 - 2az + a^2) + f_1(z-a) + f_0 + a'$$

$$= f_3z^3 + z^2\underbrace{\{f_2 - 3af_3\}}_{=0} + z\{3a^2f_3 - 2af_2 + f_1\} +$$

$$+ \{-a^3f_3 + a^2f_2 - af_1 + f_0 + a'\}$$

$$= f_3z^3 + z\left\{\frac{f_2^2}{3f_3} - \frac{2}{3}\frac{f_2^2}{f_3} + f_1\right\} + \left\{\frac{2}{27}\frac{f_2^3}{f_3^2} - \frac{f_1f_2}{3f_3} + f_0 + \ldots\right.$$

$\iff z' = g_3z^3 + g_1z + g_0$ mit den Abkürzungen

$$g_3 = f_3\,; \quad g_1 \equiv \left\{f_1 - \frac{1}{3}\frac{f_2^2}{f_3}\right\}, \quad g_0 = \left\{\frac{2}{27}\frac{f_2^3}{f_3^2} - \frac{f_1f_2}{3f_3} + f_0 + \ldots\right.$$

womit das Lemma bewiesen ist.

<u>Lemma 2</u> Durch Multiplikation eines geeigneten Faktors kann stets erreicht werden, daß der lineare Term verschwindet, i.e. es gilt

$$y' = g_3y^3 + g_2y^2 + g_1y + g_0$$

$$(***) \iff \boxed{z' = h_3z^3 + h_2z^2 + h_0}$$

wobei $w(x) = e^{\int^x g_1}$ – also $w' = w g_1$ – gesetzt und $z(x) = y(x)/w(x)$ substituiert wurde.

Beweis: $y = wz \Leftrightarrow y' = w'z + wz' = w g_1 z + w z'$

$\Leftrightarrow w z' = y' - w g_1 z = g_3 w^3 z^3 + g_2 w^2 z^2 + g_1 wz + g_0 - g_1 wz$

$\Leftrightarrow z' = (g_3 w^2) z^3 + (g_2 w) z^2 + g_0 / w$

$= h_3 z^3 + h_2 z^2 + h_0 \quad \begin{cases} h_3 = g_3 w^2 \\ h_2 = g_2 w \\ h_0 = g_0 / w \end{cases}$

Folgerung: Jede Dgl (*) kann durch Translation und anschließender Multiplikation auf "rein-kubische" Form gebracht werden:

y löst (*) $\Leftrightarrow$ mit $w(x) = e^{\int^x (f_1 - \frac{1}{3} \frac{f_2^2}{f_3})}$

und $z(x) = \left[y(x) + \frac{f_2(x)}{3 f_3(x)} \right] / w(x)$ gilt

(****) $\boxed{z'(x) = h_3 z^3 + h_0}$

hierbei ist $\begin{cases} h_3 = f_3 \cdot w^2 \\ h_0 = \frac{1}{w} \left\{ \frac{2}{27} \frac{f_2^3}{f_3^2} - \frac{f_1 f_2}{3 f_3} + f_0 + \left(\frac{f_2}{3 f_3} \right)' \right\} \end{cases}$

und $w(x)$ ist der Faktor $w(x) = e^{\int^x (f_1 - f_2^2 / 3 f_3)}$

Beweis: Durch Translation $u(x) = y(x) + f_2/3f_3(x)$

geht $y' = f_3 y^3 + f_2 y^2 + f_1 y + f_0$ nach Lemma 1 in

$$u' = g_3 u^3 + g_1 u + g_0$$ über mit

$g_3 = f_3$, $g_1 = \left\{ f_1 - \frac{1}{3} \frac{f_2^2}{f_3} \right\}$ und $g_0 = \left\{ \frac{2}{27} \frac{f_2^3}{f_3^2} - \frac{f_1 f_2}{3 f_3} + f_0 + \left(\frac{f_2}{3 f_3} \right)' \right.$

Nun setzt man $z = u/w$ mit $w = e^{\int g_1}$

und erhält mit Lemma 2

$$z' = h_3 z^3 + h_2 z^2 + h_0 = h_3 z^3 + h_0$$

mit $h_3 = g_3 \cdot w^2$, $h_2 = \underset{\substack{\| \\ 0\,!}}{g_2} w = 0$, $h_0 = g_0 / w$

Fazit: Erst wendet man die Translation an, dann wird (*) quadratfrei, es entsteht (* *). Die Multiplikation ergibt dann auch das Verschwinden des Linearterms, wobei die Quadratfreiheit invariant bleibt, dh. die Gleichung (* * *) ist ebenfalls ohne Quadratglied

<u>Lemma 3:</u> $z(x)$ erfülle die Dgl (* * * *),

$$z' = h_3 z^3 + h_0 ,$$

dann sei $S(x) = \int^x h_3$ - also $\frac{dS}{dx} = h_3(x)$

so gilt für die Funktion

$$\eta(s) := \tilde{y}(x(s))$$

↳ Umkehrfunktion zu $s(x)$

bei der man also streng genommen x abstrakt durch die Umkehrung von s durch s ausdrückt

$$\boxed{\frac{d}{ds}\eta(s) = \dot{\eta} = \eta^3 + I(s)}$$

$$\text{mit } I(s) = h_0(x(s)) / h_3(x(s))$$

Beweis: $\tilde{y}(x) = \eta(s(x)) \Rightarrow \frac{d\tilde{y}}{dx}(x) = \frac{d\eta}{ds}(s(x)) \cdot \frac{ds}{dx}(x)$

$$= \dot{\eta}(s) \cdot h_3(x)$$

$$\Rightarrow \dot{\eta}(s) = \frac{\tilde{y}'(x)}{h_3(x)} = \tilde{y}^3(x) + h_0(x)/h_3(x)$$

$$= \eta^3(s) + I(s)$$

Theorem: Translation, Multiplikation und anschließende Variablen-Substitution erlauben die äquivalente Überführung einer allgemeinen Abelschen Dgl

$$A \quad y' = f_3 y^3 + f_2 y^2 + f_1 y + f_0$$

$$B \quad \dot{\eta} = \eta^3 + I \qquad \text{(kubische Normalform)}$$

Beweis: Mit der Variablen x (in A) wird A mittels

$$y(x) = w(x)\,\eta(s(x)) - \frac{f_2}{3f_3}(x)$$

$$w(x) = e^{\int^x (f_1 - f_2^2/3f_3)\,dx}$$

$$s(x) = \int^x (f_3 w^2)\,dx$$

in die B-Gleichung geführt. Nach Lemma 1 und 2 erreichen wir ja die Form

$$z' = h_3 z^3 + h_0$$

und wegen $h_3 = g_3 w^2 = f_3 w^2$ führt die neue Variable

$$s(x) = \int^x h_3 = \int^x w^2 f_3$$

nach Lemma 3 auf die normierte Form, wobei also $\eta(s(x)) = z(x) = (y + f_2/3f_3)/w\,(x)$.

<u>Bem.</u>: Als Ü-Aufgabe sei empfohlen, die Äquivalenz $A \Longleftrightarrow B$ direkt durch die angegebenen Manipulationen herzuleiten (es klappt!)

Bemerkung:

(1) Die Translations-Substitution ist rein algebraischer Natur; sie entspricht der Reduktionstechnik, vermöge

$$z = y - a_2/3a_3 \qquad \text{die Gleichung}$$

$$a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0 = a_3 z^3 + b_1 z + b_0$$

zu gewinnen

(2) Substituiert man in $y' = \sum_0^3 a_i y^i$ y durch $y(x) = w(x)\, z(x)$ mit: w löst die interne Dgl $w' = a_1 w$, so entfällt zwangsläufig für die z Gleichung der Linearterm, während die übrigen sich nur durch w-Potenz-Faktoren unterscheiden. Denn

$$y' = w'z + wz' = a_1 wz + wz' = a_3 w^3 z^3 + a_2 w^2 z^2 + a_1 wz + a_0$$

$$\iff z' = (a_3 w^2) z^3 + (a_2 w) z^2 + (a_0/w)$$

Wegfall des Linearterms

Man beachtet, daß dieses Verfahren allgemein für

$$y' = \sum_{i=0}^{n} a_i y^i$$

anwendbar ist.

Neben dieser allgemeinen "Normalisierung" der Abel'schen Differentialgleichung gibt es noch weitere Spezifikationen:

Kennt man eine ("spezielle") Lösung, so lassen sich alle anderen durch Lösung einer "reduzierten" Dgl gewinnen (vgl. Riccati-Gleichung):

Theorem (Reduktionsprinzip für Abelsche Dgl'n)

Ist $u(x)$ irgendeine Lösung der Abelschen Dgl

$$(*) \qquad y' = f_3 y^3 + f_2 y^2 + f_1 y + f_0 ,$$

so gilt: y löst $(*)$ $\Longleftrightarrow$ $z(x) = \frac{E}{y-u}$ löst

$$(**) \qquad \boxed{z' = \frac{\Phi_1}{z} + \Phi_2}$$

wobei abkürzend gesetzt wurde

$$E(x) = e^{\int^x (3 f_3 u^2 + 2 f_2 u + f_1)}$$

$$\Phi_1 = -f_3 E^2 \quad \text{und} \quad \Phi_2 = -E\{3 f_3 u + f_2\}$$

Beweis: Er besteht lediglich aus evidenten Einsetzkalkülen: Zunächst ist per def.

$$E' = E\{3 f_3 u^2 + 2 f_2 u + f_1\}$$

$$\Rightarrow \quad z' = \frac{E'(y-u) - E(y'-u')}{(y-u)^2} = \frac{E}{y-u}\left\{3 f_3 u^2 + 2 f_2 u + f_1 - \frac{y'-u'}{y-u}\right\}$$

Löse nun y (und u) die Dgl (*), so gilt

$$y' - u' = f_3(y^3 - u^3) + f_2(y^2 - u^2) + f_1(y-u)$$

Und mit den einfachen algebraischen Faktorisierungen

$$(y^2-u^2)/_{y-u} = y+u \quad \text{sowie} \quad (y^3-u^3)/_{y-u} = y^2+yu+u^2$$

erhält man daraus die vorläufige Bilanz

$$z' = \frac{E}{y-u}\left\{3f_3u^2+2f_2u+f_1 - f_3(y^2+yu+u^2) - f_2(y+u) + f_1\right\}$$

$$= \frac{E}{y-u}\left\{f_3(2u^2-yu-y^2) + f_2(u-y)\right\}$$

Nun ist erneut $2u^2-yu-y^2$ durch $y-u$ teilbar, nämlich $2u^2-yu-y^2 = (y-u)(-y-2u)$, so daß folgt

$$z' = E\left\{(-f_3)(y+2u)\right\} - f_2E = -E\left\{f_3(y+2u) + f_2\right\}$$

$$= -E\left\{f_3(y-u) + 3f_3u + f_2\right\}$$

$y-u = E/z$

$$= -f_3E^2\cdot\frac{1}{z} - E\left\{3f_3u + f_2\right\}$$

$$= \Phi_1\cdot\frac{1}{z} + \Phi_2, \text{ wie angegeben.}$$

Alle Rechenschritte sind Äquivalenzen und der Satz folgt.

Wie trickreich Substitutionsmethoden sein können, zeigt der abschließende 3. Satz für den Spezialfall $f_0 \equiv 0$

Theorem ("homogene" Abelsche Dgl)
Gegeben sei die Dgl

$$(*) \quad y' = f_3 y^3 + f_2 y^2 + f_1 y \quad (\text{mit } f_2 \neq 0)$$

Es sei $u(x) = e^{\int^x f_1}$ sowie $s(x) = \int^x u f_2$ (neue Variable)

Damit sei $\eta(s) = y(x)/u(x)$ (mit $x = x(s)$)

Dann gilt: y erfüllt $(*)$ $\Longleftrightarrow$ $\eta(s)$ erfüllt

$$(**) \quad \boxed{\dot{\eta} = g(s)\,\eta^3 + \eta^2} \quad (\text{mit } \dot{\eta} = \tfrac{d\eta}{ds})$$

wobei $g(s) = u(x) \cdot f_3(x)/f_2(x)$ gesetzt wurde

Nun gilt weiter: Sei t eine weitere neue Variable für s, welche durch die Dgl

$$(***) \quad s'(t) = -\frac{1}{t\,\eta(s)} \quad (\text{separierte Dgl})$$

also $\int^s \eta(s)\,ds = -\log t + c$, d.h. $\frac{1}{t} = k e^{\int^s \eta(s)\,ds}$

so gilt für $s(t)$: $s(t)$ löst die Dgl

$$(****) \quad t^2 s''(t) + g(s) = 0$$

$\Longleftrightarrow$ $\eta(s)$ gemäß $(***)$ löst $(**)$ $\Longleftrightarrow$ y löst $(*)$

Beweis: Aus dem definitorischen Zusammenhang (***) folgt durch Differenzieren

$$s''(t) = \frac{1}{(t\cdot z)^2}\left\{ z(s(t)) + t\,\frac{d}{dt} z(s(t))\right\}$$

$$= \frac{1}{t^2 z^2}\left\{ z + t\cdot \dot z \cdot \frac{ds}{dt}\right\}$$

$$= \frac{1}{t^2 z^2}\left\{ z + t\left\{ g(s) z^3 + z^2\right\}\left(-\frac{1}{tz}\right)\right\}$$

$$\Longleftrightarrow t^2 s''(t) = \frac{1}{z^2}\left\{ z - g\cdot z^2 - z\right\} = -g \text{ , wie angegeben.}$$

Damit ist die Äquivalenz (****) und (**) unter der Festlegung (***') gezeigt.

Die Äquivalenz (*) und (**) verläuft analog:

$$\dot z = \frac{dz}{ds} = \frac{d}{ds}\left(y(x)/u(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(y/u\right)\cdot \frac{dx}{ds}$$

$$= \frac{y'u - u'y}{u^2}\cdot 1\Big/\frac{ds}{dx} \overset{u' = u f_1}{=} \frac{y' - y f_1}{u}\,(u f_2)^{-1}$$

$$= \frac{1}{u^2 f_2}\left\{ f_3 y^3 + f_2 y^2 + f_1 y - f_1 y\right\} = \frac{1}{u^2}\left\{ \frac{f_3}{f_2} z^3 u^3 + u^2 z^2\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \dot z = \left(u\,\frac{f_3}{f_2}\right) z^3 + z^2 \text{ , wie gewünscht.}$$