Kapitel: Elementare Methoden
– am Beispiel von 2×2 – Matrizen

Wir behandeln in diesem Kapitel die wichtigsten "elementaren" Methoden. Das sind solche, die einem geeigneten, systematischen Rechenvorgang zuordbar sind. Die Methoden schließen sich hierbei keineswegs aus: Vielmehr sind sie innerlich "verwandt" – und de facto – jede von ihnen jeweils anwendbar (sofern die Anwendbarkeitsvoraussetzungen (z.B. linear – nicht linear) vorliegen.

Wir schreiben alle Systeme (meist 2×2) mittels Ingenieur-Koordinaten

x, y oder u, v oder r, φ (Polarform)

Die System-Variable ist stets die "Zeit t".

$$\rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{array} \right\} \quad \text{mit } x, y : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

$x = x(t)$, $y = y(t)$ gesucht.

⟶ siehe I/1 a) (Rückseite)

↪ E-E-Thm allg.

$$\dot{x} = F(x) \qquad F: \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \qquad C^1\text{-VF}$$

$\Rightarrow$ $x(t)$ existiert eind.

Folg: $\dot{x} = F(x)$ hat eine n-param. Lös-mannigfaltigkeit

& $x(t_0) = \tilde{x}(t_0) \Longrightarrow x(t) = \tilde{x}(t) \; \forall t$

§1 Methode des direkten Produktes

Definition (allg.) Ein System

(1) $\dot{x} = v(x) \qquad v: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

ist von der Form des direkten Produktes (zweier Teilsysteme) wenn man die Variablen $x_1, \dots, x_n$ – ggf nach Umnummerierung – so in zwei Blöcke

$$\underbrace{x_1, \dots x_k}_{\equiv y}, \underbrace{x_{k+1} \dots x_n}_{z}$$

strukturieren kann, daß sich Gleichung (1) umformen läßt in

$$\dot{x} = v(x) \iff \begin{cases} \dot{y} = v_1(y) \\ \dot{z} = v_2(z) \end{cases}, \quad v = (v_1, v_2)$$

Das Vektorfeld v hat also eine Komponentenstruktur, daß ein Anteil (v_1) nur von den ersten k Variablen $x_1, \dots, x_k$ abhängt und die restlichen Komponenten (v_2) auch nur von den restlichen Variablen.

Beispiele: $\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f(x) \\ \dot{y} = g(y) \end{array} \right\} \quad \left| \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y \end{array} \right\} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 2x - y \\ \dot{z} = e^z \end{array} \right\} \qquad \dot{x} = Tx \quad \text{mit } T = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Lösungsstrategie (2×2 - Fall)

* Löse jede Einzel-Dgl ($\dot{x}=f(x)$, $\dot{y}=g(y)$)

* $t \longmapsto (x(t), y(t))$

Zeit t koppelt automatisch beide Variable

ist die Gesamtheit aller zeitparametrisierten Trajektorien im Phasenraum.

1. Beispiel: $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} x(t) = Ke^{t} \\ y(t) = Le^{2t} \end{array}$

$\Rightarrow (Ke^{t}, Le^{2t})$ ist parametrisierte Trajektorie

Man kann t eliminieren, denn $x = e^{t}/K \Rightarrow y = \frac{L}{K^2}x^2$

Natürlich hat die Ausgangsgleichung noch die singulären Trajektorien $x=0$ oder $y=0$

2. Beispiel: $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ (Pendel-Gleichung) $\Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\varphi} = -1 \end{cases}$

Polarkoord. — direktes Produkt

denn $2r\dot{r} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$

$\dot{\varphi} = \frac{d}{dt}\arctan y/x = -1$

$\Rightarrow r = \text{const}$ und $\varphi(t) = -t \rightsquigarrow z = x+iy = r_0 e^{-it}$

Entkoppelungs-Methode: $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$

$\rightsquigarrow$ x-Gleichung lösen und in y-Gleichung einsetzen $\rightsquigarrow$ neue y-Gleichung $\dot{y} = h(y,t)$ lösen.

§2 Methode der Variablen-Elimination

In der Gleichung

$$(1)\begin{matrix}(a)\\(b)\end{matrix}\left\{\begin{aligned}\dot{x} &= f(x,y)\\ \dot{y} &= g(x,y)\end{aligned}\right.$$

liege nicht der Fall des direkten Produktes vor (was äquivalent zu $f_y \not\equiv 0 \not\equiv g_x$). Dann besteht die Methode darin

> Wandle das System (1) in eine Dgl 2. Ordnung für eine der beiden Variablen x oder y

Vorgehensweise: Löse (a) nach y oder (b) nach x auf. und setze dies (samt der Ableitung) in die komplementäre Gleichung ein

Beispiel.
$$\left\{\begin{aligned}\dot{x} &= x-y\\ \dot{y} &= x+2y\end{aligned}\right. \Rightarrow y \overset{(a)}{=} x-\dot{x},\ \dot{y} = \dot{x}-\ddot{x}$$
$$\overset{(b)}{\leadsto} \dot{x}-\ddot{x} = x+2(x-\dot{x})$$

$$\Rightarrow \ddot{x} - 3\dot{x} + 3x = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{\frac{3}{2}t}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

Nun erhalten wir y aus (a): $y = x - \dot{x}$

$$\Rightarrow y(t) = e^{\frac{3}{2}t}\left((\alpha A+\beta B)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + (\gamma A+\delta B)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

mit einfach zu ermittelnden $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.
A, B bleiben freie Parameter.

§3 Die Trajektorien-Methode

Sie besteht in der – auf der Kettenregel fußenden – analytischen Elimination der Zeitvariablen durch Ersetzen durch die x- oder y-Variable

$$(1)\quad \begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases} \underset{\text{wo } \dot{x} \neq 0}{\Longrightarrow} \quad \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$$

Nach der Kettenregel gilt: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \dot{y}/\dot{x}$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} = h(x,y) \qquad (2)$$

Dort, wo $f(x,y) \neq 0$ ist, sind (1) und (2) äquivalent.

Ist (2) gelöst, so ergäbe sich der Phasenverlauf nach der Zeit durch Einsetzen von $y(x)$ in $\dot{x} = f(x,y)$ und aus dieser gewöhnlichen skalaren Gleichung folgt alles weitere

Beisp.: $\begin{Bmatrix} \dot{x} = -xy \\ \dot{y} = x^2 + y^2 \end{Bmatrix} \Rightarrow y' = -\frac{x^2+y^2}{xy}$

Diese Dgl. ist homogen vom Grad 2 – also vom Typ y/x

$$y' = h(\underbrace{y/x}_{u}) = -\frac{1+u^2}{u} \Rightarrow u' = \frac{h(u)-u}{x} = \frac{\frac{-(1+u^2)-u^2}{u}}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{u}{1+2u^2}\,du = -\frac{1}{x}\,dx \iff \ln(1+2u^2) = -4\ln x + c$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{K}{x^2} - \frac{1}{2}x^2 \,, \quad K>0$$

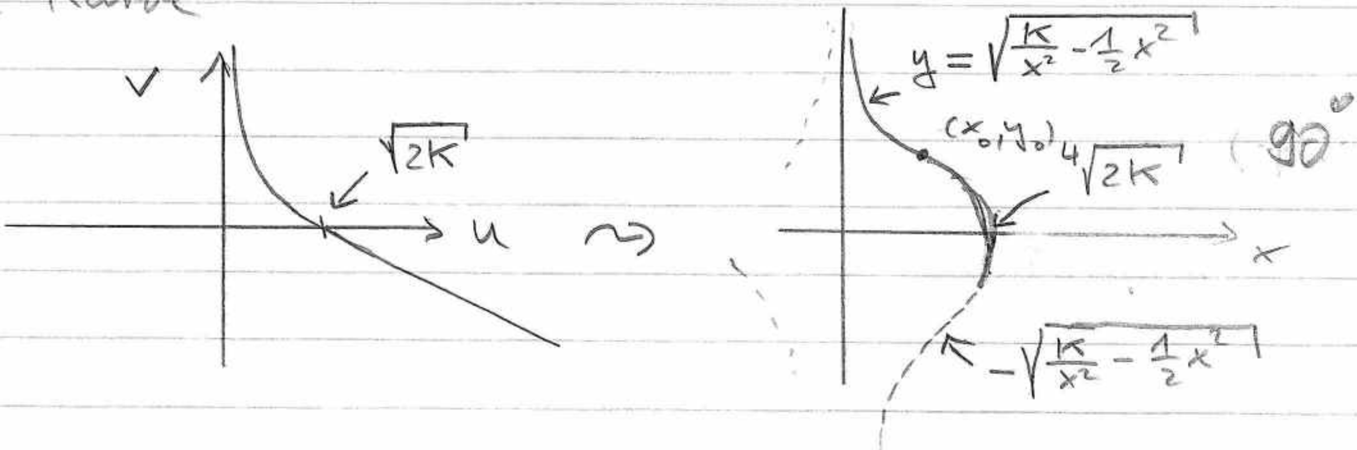
Trajektorienverlauf: → p 6

y) x an

<u>Bemerkung</u>: Diese "analytisch beschriebene" Lösung der Trajektorien-Dgl hat im Falle der Diskussion über den Zeit-Verlauf noch einige Zusatzüberlegungen nötig:

Zunächst: Nur $K > 0$ sinnvoll, da $y^2 \geq 0$ $\Big\}$ $K = e^C$!

Mit $v = y^2$ und $u = x^2$ wäre $V = \frac{K}{u} - \frac{1}{2}u$ die Kurve



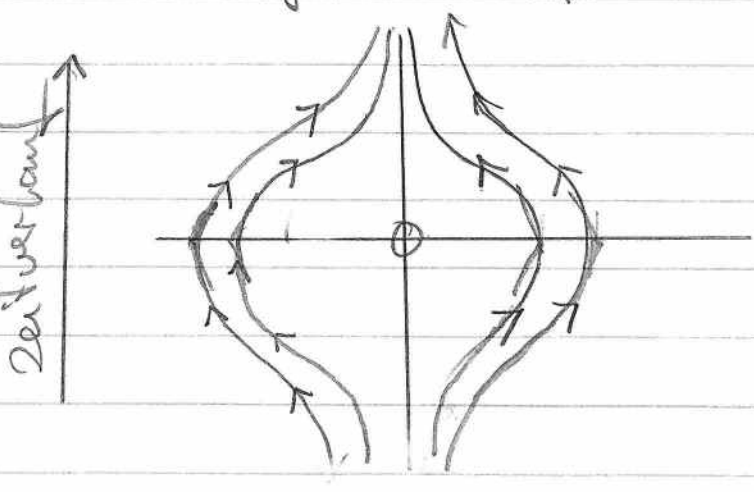
Ist nun (x_0, y_0) ein Punkt in $\mathbb{R}^2$, so gilt nach Dgl

$\dot{x} < 0$ und $\dot{y} > 0$ für $x > 0, y > 0$ (I)

$\dot{x} > 0$ und $\dot{y} > 0$ für $x > 0, y < 0$ (IV)

$\dot{x} > 0$ und $\dot{y} > 0$ für $x < 0, y > 0$ (II)

$\dot{x} < 0$ und $\dot{y} > 0$ für $x < 0$ $y < 0$ (III)



§4 Die Eigenwertmethode (bei linearen 2x2-Systemen)

Gegeben:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{u} = au + bv \\ \dot{v} = cu + dv \end{cases} \equiv T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Theorem (Eigenwert-Methode)

Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Dann gilt für $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 e^{\lambda t}$

$$\boxed{\dot{\vec{x}} = T\vec{x} \iff \lambda \in \mathbb{C} \text{ ist Eigenwert und } \vec{x}_0 \text{ ist Eigenvektor zu } \lambda}$$

~~Ferner: Mittels der Eigenwertmethode ergeben sich alle Lösungen~~

Wenn also ein Vektor der Form $\vec{x}_0 e^{\lambda t}$ Lösung von (1) ist, so gilt der beschriebene Zusammenhang.
Nun gilt nach der E&E Theorie, daß

$$U = \{ \vec{x}(t) \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{x} \text{ löst } (1) \} \equiv 2 \text{ dim. UR}$$

(weil jedes AWP-Problem eindeutig lösbar ist und weil jede solche Lösung durch die beiden l.u. kanonischen Lösungen

$\vec{x}_1$ mit $\dot{\vec{x}}_1 = T\vec{x}_1$, $\vec{x}_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{x}_2$ mit $\dot{\vec{x}}_2 = T\vec{x}_2$, $\vec{x}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

per Linearkombination gewonnen wird).

Die Eigenwertmethode bringt nun stets einen 2-dim. Lösungsraum – also alle Lösungen so gewinnbar:

Beweis: (Die Äquivalenz ist trivial)

$$\dot{x} = \lambda x_0 e^{\lambda t} = \lambda x = Tx \iff x \text{ EV zum EW } \lambda$$

Man gewinnt λ aus der charakteristischen Gleichung

$$\det(T - \lambda \mathrm{Id}) = 0 \iff (a-\lambda)(d-\lambda) - cb = 0$$

„Ferner"
$\rightsquigarrow$ Es treten 3 Fälle auf:
- $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$
- $\lambda_1 = \lambda_2$
- $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$

1. Fall: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Dann gibt es also 2 l.u. EV

x_1 zu λ_1 und x_2 zu λ_2

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \{\vec{x}(t) = A x_1 e^{\lambda_1 t} + B x_2 e^{\lambda_2 t} \mid A, B \in \mathbb{R}\}$$

ist zwei-dimensionaler Lös-raum – also Lös-raum.

2. Fall: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Sei $x = x_1$ EV zu $\lambda \Rightarrow \{A x e^{\lambda t}\} \subset \mathcal{L}$

Für eine zweite l.u. Lösung gibt es 2 Fälle

a) $\dim \mathrm{Kern}(T - \lambda \mathrm{Id}) = 2 \iff T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$\iff$ jeder Vektor in $\mathbb{R}^2$ ist EV zu λ.

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \{A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{\lambda t} + B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{\lambda t} \mid A, B \in \mathbb{R}\}$$

ist dann der gesuchte Lösungsraum.

b) $\dim \text{Kern}(T-\lambda Id)=1$. Dann findet man zwar keinen weiteren l.u. Eigenvektor – wohl aber einen sog. "Hauptvektor":

<u>Lemma:</u> Für diesen Fall des doppelten EW's aber mit nur 1-dim. Eigenraum $= \text{Lin}\{x\}$ gilt

(1) Die Gleichung $(T-\lambda Id)z = x$ ist lösbar, und jede Lösung ist l.u. zu x

(2) Für jedes z gemäß (1) ist $y(t) = (tx+z)e^{\lambda t}$ eine Lösung des Systems (welche l.u. zur EV Lösung $xe^{\lambda t}$ ist.

Beweis: (1) $\text{Bild}(T-\lambda Id) \overset{!}{=} \text{Kern}(T-\lambda Id) = \text{Lin}\{x\}$

denn nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt

$$(T-\lambda Id)(T-\lambda Id) = \underbrace{T^2 - 2\lambda T + \lambda^2 Id}_{\text{charakt. Polynom in } T} \equiv 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\text{Bild}(T-\lambda Id)}_{\substack{\text{1-dim.} \\ \text{(nach Rangsatz)}}} \subseteq \underbrace{\text{Kern}(T-\lambda Id)}_{\text{1-dim}} \Rightarrow \text{"="}$$

da also $x \in \text{Kern}(T-\lambda Id) = \text{Bild}(T-\lambda Id)$ gibt es ein z mit $(T-\lambda Id)(z) = x$

l.u: Wäre $z = \alpha x \Rightarrow (T-\lambda Id)z = 0 \neq x$.

→ P. 11

(2) Man rechnet nach: $y(t) = (tx+z)e^{\lambda t} \Rightarrow$

$$\dot{y}(t) = \lambda y(t) + xe^{\lambda t} = \left(\lambda(tx+z)+x\right)e^{\lambda t}$$

$$= t\lambda x e^{\lambda t} + (\lambda z + x)e^{\lambda t}$$

$$= t\,T(xe^{\lambda t}) + \left(\lambda z + (T-\lambda \mathrm{Id})z\right)e^{\lambda t}$$

$\lambda x = Tx$

$$= t\,T(xe^{\lambda t}) + Tz\,e^{\lambda t}$$

$$= T(tx+z)e^{\lambda t} = Ty \quad \text{qed.}$$

$$\rightsquigarrow \mathcal{L} = \left\{ Axe^{\lambda t} + B(tx+z)e^{\lambda t} \;\middle|\; A,B \in \mathbb{R} \right\}$$

mit $Tx = \lambda x$, $(T-\lambda \mathrm{Id})z = x$

3. Fall: $\lambda = \alpha \pm i\omega$ (konj. komplexe EW)

$\rightsquigarrow$ $z = u \pm iv$ (konj. komplexer EV zu $\lambda, \bar{\lambda}$)

$$\rightsquigarrow \mathcal{L} = \left\{ Ae^{\alpha t}(u\cos\omega t - v\sin\omega t) + Be^{\alpha t}(u\sin\omega t + v\cos\omega t) \right\}$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$

denn: $ze^{\lambda t}$ erfüllt in $\mathbb{C}$: $(\dot{ze^{\lambda t}}) = T(ze^{\lambda t})$

$\Leftrightarrow$ $(u+iv)e^{\alpha t}(\cos\omega t + i\sin\omega t)$ ist komplexe Lösung;

dann: T reell, $\frac{d}{dt}$ reeller Operator $\Rightarrow$ $\mathrm{Re}(ze^{\lambda t})$ und $\mathrm{Im}(ze^{\lambda t})$ sind reelle (l.u.) Lösungen ∎

Beispiele

1\. Fall: $\begin{cases} \dot{x} = 6x - 3y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$ $(\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 3)$

$\downarrow$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\downarrow$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L} = \left\{ A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t} + B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} \right\}$$

2\. Fall (b): $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = 3)$

$$\mathcal{L} = \left\{ A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + B \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^{3t} \right\}$$

3\. Fall $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y \\ \dot{y} = -5x + y \end{cases}$ $(\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i)$

$$\mathcal{L} = \left\{ A e^{2t} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cos 3t - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \sin 3t \right\} + B e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \sin 3t + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cos 3t \right) \right\}$$

Bemerkung zum Fall 2/b: (HA)

$(tx + z) e^{\lambda t}$ Lösung $\Longleftrightarrow$ $\lambda(tx + z) + x = T(tx + z)$

$\Longleftrightarrow$ $t(\lambda x - Tx) = (T - \lambda \mathrm{Id}) z - x \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\lambda x = Tx}$ und $\boxed{(T - \lambda \mathrm{Id}) z = x}$

λ EW
x EV zu λ

z Hauptvektor zu λ

Anm.: Lösung exist. nur, wenn $\mathrm{Kern}(T - \lambda \mathrm{Id}) \subseteq \mathrm{Bild}(T - \lambda \mathrm{Id})$

<u>Bemerkung</u> Durch die EW-Methode wurde gleichzeitig die "<u>Fundamental</u>"-Matrix (Wronski-Matrix, - Fluß-Abbildung) gefunden:

Betrachtet man die "Konstanten" $A, B \in \mathbb{R}$ — bzw. $(A,B) =: x_0 \in \mathbb{R}^2$ als Anfangswerte ($t_0 = 0$) so sind

$\lambda_1 \neq \lambda_2, \in \mathbb{R}$ $\quad \begin{pmatrix} | & | \\ x_1 e^{\lambda_1 t}, & x_2 e^{\lambda_2 t} \\ | & | \end{pmatrix} = 2\times 2\text{-Matrix}$

$\lambda_1 = \lambda_2$: $\quad \begin{vmatrix} | & | \\ x e^{\lambda t}, & (tx+z) e^{\lambda t} \\ | & | \end{vmatrix} = 2\times 2\text{-Matrix}$

$\lambda = \alpha + i\omega$ $\quad \begin{pmatrix} | & | \\ e^{\alpha t}(u\cos\omega t - v\sin\omega t, & e^{\alpha t}(u\sin\omega t + v\cos\omega t)) \\ | & | \end{pmatrix}$

Fundamentalmatrizen: Jede Spalte ist eine Lösung und beide sind l.u.

Bemerkung: $\dot{x} = Tx$ und $x(0) = x_0 \Rightarrow$

man muß (Fall 1) $x_0 = \alpha x_1 + \beta x_2$ darstellen

also $(\alpha, \beta) = M^{-1}(x_0)$ mit $M^{-1} = (x_1, x_2)^{-1}$

$\Rightarrow x := \text{Fund. Matrix}\underbrace{[(\alpha, \beta)]}_{\text{angewendet auf}}$ erfüllt $\left| \begin{array}{l} \dot{x} = Tx \\ x(0) = x_0 \end{array} \right.$

§5 Die Operator Methode

Ist $x(t)$ eine von der reellen (Zeit-) Variablen t abh. Funktion, so setzt man

$$\mathcal{D} = \frac{d}{dt}, \quad \mathcal{D}^2 = \frac{d^2}{dt} = \mathcal{D}(\mathcal{D}), \quad \mathcal{D}^n = \mathcal{D}(\mathcal{D}^{n-1})$$

sowie $\mathcal{D}^0 = Id$ (also $\mathcal{D}^0(x) = x$)

$$(\mathcal{D}+4)(x) = \dot{x} + 4x,$$
$$(\mathcal{D}^2 - 2\mathcal{D} + 1)(x) = \ddot{x} - 2\dot{x} + x$$

Allgemein ist ein linearer Differentialoperator n-ter Ordnung durch

$$\boxed{L = a_n \mathcal{D}^n + a_{n-1}\mathcal{D}^{n-1} + \ldots + a_0(\mathcal{D}^0)} \quad a_i \in \mathbb{R}$$

gegeben. Wobei wir also i.f. konstante Koeff. a_i vorgeben.

Lemma: Anwendung der Operatoren L ist kommutativ

$$L_2(L_1(x)) = L_1(L_2(x))$$

Bew. (H.A). Frage: Wie ist das, wenn die $a_i \neq const(t)$?

Operator Methode: (2×2 - Fall)

Ein gegebenes System 2^{er} gekoppelter Dgl'n (≥ 1. Ordnung für 2 gesuchte Funktionen $u(t)$, $v(t)$) wird als Operator - Matrix - Operation formuliert.

Dann wird diese Operator-Matrix analog zum Gauß-Algorithmus diagonalisiert bzw. vereinfacht.

<u>Beispiel:</u>

$$\begin{aligned} \dot u &= u+v \\ \dot v &= 2u-v \end{aligned} \iff \begin{aligned} (\dot u - u) - v &= 0 \\ -2u + (\dot v + v) &= 0 \end{aligned}$$

das bedeutet: $$\begin{aligned} (D-1)u - v &= 0 \\ -2u + (D+1)v &= 0 \end{aligned}$$

$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix} (D-1), & -1 \\ -2 & (D+1) \end{pmatrix}}_{\text{Operator-Matrix}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wenden wir auf die obere Gleichung den Operator $L=(D+1)$ an und addieren beide Gleichungen, so bleibt nur noch eine Gleichung für u!

$$\left.\begin{aligned} (D+1)(D-1)u - (D+1)v &= 0 \\ -2u + (D+1)v &= 0 \end{aligned}\right\} +$$

$$\Rightarrow (D^2-1)u - 2u = 0 \iff \ddot u - 3u = 0$$

$$\Rightarrow u = ae^{\sqrt{3}t} + be^{-\sqrt{3}t} \quad \text{mit } a,b \in \mathbb{R}$$

Nun ist $v = (D-1)u \Rightarrow$

$$v = a(\sqrt{3}-1)e^{\sqrt{3}t} - b(\sqrt{3}+1)e^{-\sqrt{3}t}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = ae^{\sqrt{3}t}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3}-1 \end{pmatrix} + be^{-\sqrt{3}t}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$$

In folgendem Satz fassen wir die wichtigsten Hantierungsregeln für das Rechnen mit gewöhnl. Differentialoperatoren zusammen

<u>Satz</u> (über Differentialoperatoren)

① Die Operatoren $L\left(=\sum_0^n a_i D^i\right)$ sind lineare Operatoren

$$L : C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

② $L_1 \circ L_2 = L_2 \circ L_1$ (nur für a_i konstant!)

③ $\operatorname{ord}(L_1 \circ L_2) = \operatorname{ord} L_1 + \operatorname{ord} L_2$

④ L ist surjektiv und $\dim \operatorname{Kern} L = \operatorname{ord} L$

⑤ Ist $L = L_1 \circ L_2$, so gilt

$\operatorname{Kern} L_2 \subset \operatorname{Kern} L$ und $\operatorname{codim}\overbrace{}^{\operatorname{Kern} L_2 \subset \operatorname{Kern} L} = \operatorname{ord} L_1$

Merke: $\boxed{L(u) = 0 \Longleftrightarrow (L_2 u) \in \operatorname{Kern} L_1}$

So ist also insbesondere $L^2 u = 0 \not\Rightarrow L(u) = 0$!

Beweise: ①: Ist trivial, ② rechnet man nach (H.1)

③ folgt aus der elementaren Regel $D^m(D^k) = D^{m+k}$

④ Ist ein Resultat der allg. E&E-Theorie

⑤ $Lx = 0 \Longleftrightarrow L_2(x) \in \operatorname{Kern} L_1$. Nun ist $\dim \operatorname{Kern} L_1 = \operatorname{ord} L_1$

Weil nun L_2 nach ④ surjektiv ist, gilt

$$\dim L_2^{-1}(\operatorname{Kern} L_1) = \dim \operatorname{Kern} L_2 + \dim \operatorname{Kern} L_1 .$$

Satz (Operator-Matrizen, ~ Determinante)

Gegeben sei das (inhomogene) 2×2 System

$$(*)\quad \begin{matrix}(*1)\\(*2)\end{matrix}\left\{\begin{aligned} L_1 u + L_2 v &= f \\ L_3 u + L_4 v &= g \end{aligned}\right\} \text{ mit } f, g\ C^\infty\text{-Funktionen}$$

Hierzu bilden wir die Operator-Matrix $\mathcal{L}$

$$\boxed{\mathcal{L} = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{pmatrix} \text{ mit } \det \mathcal{L} =: L = L_1 L_4 - L_3 L_2}$$

(1) ⇒ Ist $L \not\equiv 0$ und $n = \operatorname{ord} L$, dann gilt:
das System $(*)$ ist stets lösbar und die Parameteranzahl ist n, d.h. math.

$$\mathcal{L} : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$$

ist surjektiv und $\dim \operatorname{Kern} \mathcal{L} = n$

Beachte: $0 < \operatorname{ord} L \leq \max\{\operatorname{ord} L_1 + \operatorname{ord} L_4, \operatorname{ord} L_2 + \operatorname{ord} L_3\}$
und es kann auch $\operatorname{ord} L < \operatorname{ord} L_i\ (i = 1, \dots, 4)$ eintreten!

(2) Operator-Methode: Phase 1

1. Schritt: Wende auf $(*1)$ L_4 an
2. Schritt: Wende auf $(*2)$ L_2 an
3. Schritt: Subtrahiere beide neue Gleichungen ⇝

$$\rightsquigarrow L(u) = (L_1 L_4 - L_2 L_3)\, u = L_4 f - L_2 g =: h$$

Phase 2: Die zweite Funktion (v) findet man

i) entweder analog (Eliminiere u) S. R

$$\rightsquigarrow Lv = L_1 g - L_3 f = \tilde{h}$$

und anschließender Reduzierung aller Konstanten mittels Einsetzen in (*)

ii) oder kürzer durch direkte Nutzung einer der beiden Gleichungen - z. B.

$$L_2 v = f - L_1 u \equiv \text{Dgl für } v$$

und anschließender Reduzierung der Konstanten durch Einsetzen in (*2)

iii) Hat das System bezüglich der verbleibenden Variable (hier: v) die Sonderform

$$F(u) + \alpha v^{(k)} + \beta v = f$$
$$G(u) + \gamma v^{(k)} + \delta v = g$$

mit einem $k \geq 1$, und $\det\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \neq 0$

so läßt sich $v^{(k)}$ eliminieren (*) und man gewinnt eine Gleichung

$$v = v(u; f, g)$$

welche v direkt errechnet

✓ (*) 1. Gl. mal γ − 2 Gl. mal α.

Beweis (alle Aussagen ①: HA; Methode: Beispiele):

Beispiel:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\dot{u} - 2\dot{v} - 3u = t \\ 2\dot{u} + 2\dot{v} + 3u + 8v = 2 \end{array} \right\} \overset{D}{\leadsto}$$

$$(1') \quad \begin{array}{l} (2D-3)u - (2D)v = t \\ (2D+3)u + (2D+8)v = 2 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Operator-Determinante $L = (2D-3)(2D+8) + 2D(2D+3)$

$\Leftrightarrow L = 8D^2 + 16D - 24$. Damit folgt (Phase 1)

$$Lu = (2D+8)(t) - (2D)2 = 2 + 8t - 0 = 2 + 8t$$

$$(2) \Leftrightarrow \boxed{\ddot{u} + 2\dot{u} - 3u = t + 1/4} \quad \text{(inhomogene Dgl. 2. Ordn.)}$$

Diese löst man nun konventionell (also mit $e^{\lambda t}$-Methode und Störfunktion-Ansatz (Invariante Unterräume).

NR: i) homogen: $\ddot{u} + 2\dot{u} - 3u = 0 \overset{u = e^{\lambda t}}{\leadsto} \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -3 \leadsto u_0(t) = Ae^t + Be^{-3t}$

ii) inhomogen: Ansatz $u(t) = at + b$

$\Rightarrow a = -1/3$ und $b = -11/36$

$$(3) \Rightarrow \boxed{u(t) := Ae^t + Be^{-3t} - \frac{1}{3}t - 11/36} \equiv \text{allg. Lös. von (2)}$$

Wir können nun v ermitteln (Phase 2)

i) entweder mittels erneuter L-Gleichung

ii) mit geschicktem Einsetzen in (1)

Wir führen beides vor:

Meth. i) : Nach der allgemeinen Betrachtung im Theorem gilt

$$Lv = L_1 g - L_3 f = (2D-3)(2) - (2D+3)t$$

$$\Leftrightarrow \quad Lv = -6 - 2 - 3t = -3t - 8$$

$$\Leftrightarrow \quad 8\ddot{v} + 16\dot{v} - 24v = -3t - 8 \quad \Leftrightarrow$$

(4) $\quad \ddot{v} + 2\dot{v} - 3v = -\frac{3}{8}t - 1$ (inh. Dgl. 2. Ord.)

NR: i) homogener Teil ist identisch mit (2) (per Def)

ii) $v = at + b$ - Ansatz liefert $a = 1/8$, $b = 5/12$

(5) $\Rightarrow \boxed{v(t) = Ce^{t} + De^{-3t} + \frac{1}{8}t + 5/12}$ allg. Lösung von (3)

<u>Folgerung:</u> Der Lösungsraum der ursprünglichen Gleichung (1) ist ein 2-dim. affiner Unterraum des 4-dimensionalen (affinen) Raumes

(6) $\left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} e^{-3t} + \begin{pmatrix} -1/3\, t - 11/36 \\ \frac{1}{8}t + 5/12 \end{pmatrix} \right.$ $\quad A, B, C, D \in \mathbb{R}$

Das bedeutet, daß die 4 Konstanten A, B, C, D nicht "frei" sind, sondern daß nur 2 vorgegeben werden können (und die restlichen beiden dadurch bestimmt sind).

Wir nennen das: Reduktion der Konstanten. Dies geschieht durch Einsetzen von (6) in (1) (eine elementare – manchmal jedoch "mühselige" Rechnung). Mit den Formeln (6) – eingesetzt in (1) folgt

$$2Ae^{t} - 2\cdot 3Be^{-3t} - \frac{2}{3} - \left(2Ce^{t} - 2\cdot 3De^{-3t} + 2\cdot\frac{1}{8}\right)$$
$$- 3\left(Ae^{t} + Be^{-3t} - \frac{t}{3} - \frac{11}{36}\right) = t$$

und

$$2Ae^{t} - 2\cdot 3Be^{-3t} - \frac{2}{3} + \left(2Ce^{t} - 2\cdot 3De^{-3t} + 2\cdot\frac{1}{8}\right)$$
$$+ 3\left(Ae^{t} + Be^{-3t} - \frac{t}{3} - \frac{11}{36}\right) + 8\left(Ce^{t} + De^{-3t} + \frac{t}{8} + \frac{5}{12}\right) = 2$$

geordnet (nach e^{t} und e^{-3t} – sowie den inhom. Anteilen)

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} e^{t}(-A-2C) + e^{-3t}(-9B+6D) &= 0 \\ e^{t}(5A+10C) + e^{-3t}(-3B+2D) &= 0 \end{aligned}\right\} \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left[A + 2C = 0\right] \text{ und } \left[-3B + 2D = 0\right]$$

(da e^{t} und e^{-3t} unabh. sind) $\Rightarrow \begin{matrix} A = -2C \\ 2D = 3B \end{matrix}$

$$(8) \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = Ae^{t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + Be^{-3t}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}t - \frac{11}{36} \\ \frac{1}{8}t + \frac{5}{12} \end{pmatrix}}$$

$\equiv$ allgemeine Lösung von (1)

ii) <u>Mit der Einsetzmethode</u>: Aus der 1. Gleichung von (1) (welche geeigneter ist als die 2. Gleichung) folgt:

$$(9) \quad 2\dot{v} = 2\dot{u} - 3u - t$$

In (9) setzen wir die – mittels L-Operator gewonnene Funktion u (also Gleichung (3)) ein:

$$2\dot{v} = 2\left(Ae^{t} - 3Be^{-3t} - \frac{1}{3}\right) - 3\left(Ae^{t} + Be^{-3t} - \frac{1}{3}t - \frac{11}{36}\right) - t$$

$$= -Ae^{t} - 9Be^{-3t} + \frac{1}{4}$$

$$(10) \Rightarrow 2v = -Ae^{t} + 3Be^{-3t} + \frac{1}{4}t + 2a \quad (\text{mit } a \in \mathbb{R})$$

Aus (10) ist nur noch der Parameter a zu bestimmen. Weil (10) $\Longleftrightarrow$ (9) $\Longleftrightarrow$ (1)/Gleichung 1 ist, geschieht dies durch Einsetzen von (10), (3) in Gleichung (1)/2.

$$\Rightarrow 2\left(Ae^{t} - 3Be^{-3t} - \frac{1}{3}\right) + \left(-Ae^{t} - 9Be^{-3t} + \frac{1}{4}\right)$$

$$+ 3\left(Ae^{t} + Be^{-3t} - \frac{t}{3} - \frac{11}{36}\right) + \frac{8}{2}\left(-Ae^{t} + 3Be^{-3t} + \frac{1}{4}t + 2a\right) = 2$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{11}{12} + 4a = 2 \Longleftrightarrow a = \frac{5}{12} \Longleftrightarrow \text{Gl.}(5).$$

Bemerkung: Darüberhinaus kann durch andere geeignete Manipulationen die zweite Funktion (v) noch schneller gefunden werden

iii) Eliminationsmethode:

Addiert man beide Ausgangsgleichungen (1)

$$\left.\begin{aligned} 2\dot{u} - 2\dot{v} - 3u \quad &= t \\ 2\dot{u} + 2\dot{v} + 3u + 8v &= 2 \end{aligned}\right\} +$$

$$\Rightarrow \quad 4\dot{u} + 8v = t+2 \quad \Rightarrow 8v = -4\dot{u} + t + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 8v = -4\left(Ae^{t} - 3Be^{-3t} - \tfrac{1}{3}\right) + t + 2$$

$$8v = -4Ae^{t} + 12Be^{-3t} + t + \tfrac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \quad v = -\tfrac{1}{2}Ae^{t} - \tfrac{3}{2}Be^{-3t} + \tfrac{t}{8} + \tfrac{5}{12} \quad (\Leftrightarrow (5))$$

Im jedem Fall haben wir die 2-parametrische Lös-schar erhalten

$$\left\{ \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = Ae^{t}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + Be^{-3t}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{11}{36} \\ \frac{5}{12} \end{pmatrix} \right\}$$

Copy ~~LA III~~ 36 ~~0/16~~

23

Anhang

iii) mit der Eliminationsmethode: Addition der beiden Ausgangsgleichungen ergibt

$$4\dot{x}_1 + 8x_2 = t + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad x_2 = -\frac{1}{2}\dot{x}_1 + \frac{1}{8}t + \frac{1}{4}$$

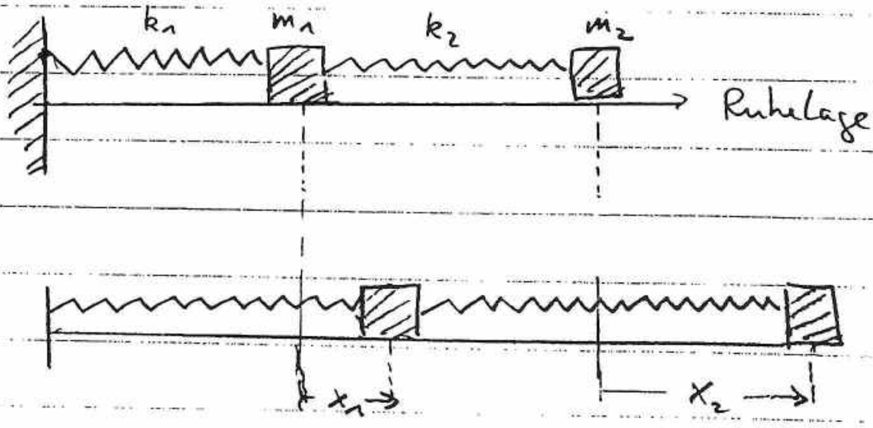
$$\Leftrightarrow \quad x_2(t) = -\frac{1}{2}c_1e^{t} - \frac{3}{2}c_2e^{-3t} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}t + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_2(t) = -\frac{1}{2}c_1e^{t} - \frac{3}{2}c_2e^{-3t} + \frac{1}{8}t + \frac{5}{12}.$$

In allen Fällen sind wir zum gleichen Ergebnis gekommen.

Beispiel (gekoppelte Massenschwingung)

Wir skizzieren folgende Versuchsanordnung



Hierbei seien k_1 und k_2 die Federkonstanten der beiden Federn und m_1, m_2 die Massen,

x_1, x_2 sind die Auslenkungen der Massen aus ihrer Ruhelage; im übrigen verlaufe die Bewegung reibungsfrei. Dann gelten folgende Newton'sche Kraftgleichungen

$$m_1\ddot{x}_1 = \underbrace{-k_1x_1}_{\text{Federkraft 1}} + \underbrace{k_2(x_2-x_1)}_{\text{Federkraft 2}} \quad \text{und} \quad m_2\ddot{x}_2 = \underbrace{k_2(x_1-x_2)}_{\text{Federkraft 2}}$$

entgegen, gleich

$$\leadsto \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{gekoppeltes Schwingsystem.}$$

Strategie: Ist x_1 bekannt, so findet man x_2 sofort aus der 1. Gleichung (also Einsetzmethode sinnvoll)

Um nun die Operatormethode anzuwenden, schreiben wir das System in der Matrix-Notation

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 \quad & - k_2 x_2 &= 0 \\ - k_2 x_1 \quad & + m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Es ist $L_1 = m_1 D^2 + (k_1+k_2)$, $L_2 = -k_2$, $L_3 = -k_2$, $L_4 = m_2 D^2 + k_2$ und die Operator-Determinante ist

$$L = \left(m_1 D^2 + (k_1+k_2)\right)\left(m_2 D^2 + k_2\right) - k_2^2$$

$$= m_1 m_2 D^4 + D^2 \left\{ m_1 k_{\cancel{1}2} + m_2 (k_1+k_2) \right\} + k_1 k_2 \qquad (\neq 0)$$

Phase 1: Für x_1 ergibt sich somit die homogene Gleichung 4. Ordn

$$m_1 m_2 \overset{....}{x}_1 + \left\{ m_1 k_{\cancel{1}2} + m_2 (k_1+k_2) \right\} \ddot{x}_1 + k_1 k_2 x_1 = 0$$

mit der zugehörigen biquadratischen charakteristischen Gleichung

$$m_1 m_2 \lambda^4 + \left\{ m_1 k_2 + m_2 (k_1+k_2) \right\} \lambda^2 + k_1 k_2 = 0$$

Wegen der (physikalisch bedingten) Positivität aller Zahlen hat diese

Gleichung nur negative λ^2 zur Lösung, somit rein imaginäre λ – was nichts anderes als Schwingungslösungen bedeutet. Die Rechnung im Detail

Zwischenrechnung: mit $\lambda^2 = t$ ist

$$t^2 + \frac{\{m_1 k_{\overset{2}{1}} + m_2(k_1+k_2)\}}{m_1 m_2}\, t + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t_{1,2} = -\frac{\{m_1 k_{\overset{}{1}} + m_2(k_1+k_2)\}}{2 m_1 m_2} \pm \sqrt{-\frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} + \frac{\{\ \}^2}{4 m_1^2 m_2^2}}$$

oder kurz: $\quad t_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \quad < 0$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\alpha - \sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\,, \quad \lambda_{3,4} = \pm i \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i\omega\,, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\mu$$

$$\Rightarrow \quad x_1(t) = c_1 \sin\omega t + c_2 \cos\omega t + c_3 \sin\mu t + c_4 \cos\mu t$$

mit beliebigen reellen Konstanten c_1, c_2, c_3, c_4

$$\Rightarrow \quad x_2(t) = \frac{1}{k_2}\left\{ m_1 \ddot{x}_1 + (k_1+k_2)\, x_1 \right\}$$

Bemerkung: Wir sehen, daß $x_1(t)$ und $x_2(t)$ Schwingungsüberlagerungen der Frequenzen ω und μ sind. Stehen diese – was ein numerischer Zufall ist – in einem rationalen Verhältnis, so ist die resultierende Bewegung periodisch – im anderenfall nicht, vgl. Experiment.

UYDY ~~LA III~~ SS ~~0~~/19

26

Beispiel: $\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_1 + 5x_1 - 2x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 - 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{array} \right\}$.

In Matrixform erhalten wir das System

$$\begin{array}{l} \ddot{x}_1 + 5x_1 \quad - \quad 2x_2 = 0 \\ \quad -2x_1 \quad + \quad \ddot{x}_2 + 2x_2 = 0 \end{array}$$

Phase 1: $L(x_1) = (D^2+5)(D^2+2)\,x_1 - 4x_1 = 0$

$\Leftrightarrow (D^4 + 7D^2 + 10)\,x_1 - 4x_1 = (D^2 + 7D + 6)\,x_1 = 0$

$\Leftrightarrow \ddddot{x}_1 + 7\ddot{x}_1 + 6x_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^4 + 7\lambda^2 + 6 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{-6 + \frac{49}{4}} = -\frac{7}{2} \pm \frac{5}{2} = \begin{cases} -1 \\ -6 \end{cases}$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$ und $\lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{6}$

$\Rightarrow x_1(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t + c_3 \sin\sqrt{6}\,t + c_4 \cos\sqrt{6}\,t$
mit beliebigen Konstanten c_1, c_2, c_3, c_4

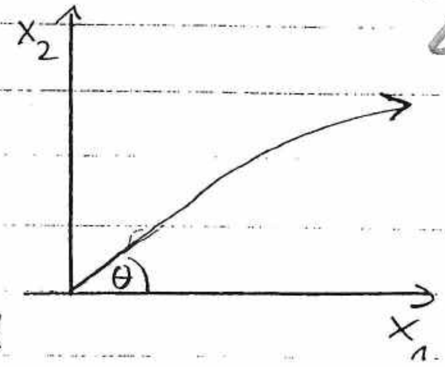
$\Rightarrow x_2(t) = \frac{1}{2}(\ddot{x}_1 + 5x_1)$

$$= \frac{1}{2}\{ -c_1 \sin t - c_2 \cos t - 6c_3 \sin\sqrt{6}\,t - 6c_4 \cos\sqrt{6}\,t + 5c_1 \sin t + 5c_2 \cos t + 5c_3 \sin\sqrt{6}\,t + 5c_4 \cos\sqrt{6}\,t \}$$

$$= 2c_1 \sin t + 2c_2 \cos t - \frac{1}{2}c_3 \sin\sqrt{6}\,t - \frac{1}{2}c_4 \cos\sqrt{6}\,t$$

Beispiel (Schiefer Wurf mit Reibung)

Ein Geschoß werde gemäß nebenstehender Skizze mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 abgefeuert. Wir nehmen an



Luftwiderstandskräfte $\sim$ Geschwindigkeit

$\Rightarrow$ Horizontalbilanz ergibt $\quad m\ddot{x}_1 + k\dot{x}_1 = 0$
Vertikalbilanz ergibt $\quad m\ddot{x}_2 + k\dot{x}_2 + mg = 0$

Dieses System ist natürlich entkoppelt – daher einfach zu lösen:

$$\dot{x}_1 = y \Rightarrow \dot{y} = -\frac{k}{m}y \Rightarrow y(t) = Ke^{-\frac{k}{m}t}$$

$$\Rightarrow x_1(t) = -\frac{m}{k}Ke^{-\frac{k}{m}t} + L$$

$$\dot{x}_2 = y \Rightarrow \dot{y} + \frac{k}{m}y = -g \Rightarrow y(t) = \tilde{K}e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{gm}{k}$$

$$\Rightarrow x_2(t) = -\frac{m}{k}\tilde{K}e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{gm}{k}t + \tilde{L}$$

Nun führen wir Anfangsbedingungen ein:

$x_1(0) = 0 = x_2(0)$ und $v_0^2 = \dot{x}_1^2(0) + \dot{x}_2^2(0)$
sowie $\dot{x}_2(0)/\dot{x}_1(0) = \tan\theta$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{k}K \text{ und } \tilde{L} = \frac{m}{k}\tilde{K} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \frac{m}{k}K\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \\ x_2(t) = \frac{m}{k}\tilde{K}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - \frac{gm}{k}t \end{cases}$$

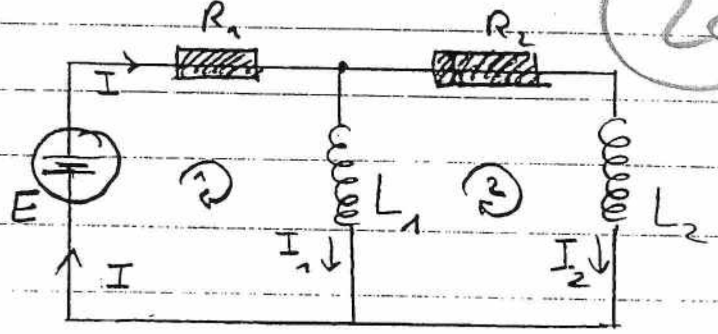
$$\dot{x}_1(0) = K, \quad \dot{x}_2(0) = \tilde{K} - \frac{gm}{k}$$

$$\Rightarrow v_0^2 = K^2 + \left(\tilde{K} - \frac{gm}{k}\right)^2 \text{ und } \tan\theta = \frac{\tilde{K} - \frac{gm}{k}}{K} \Rightarrow \tilde{K} - \frac{gm}{k} = K\tan\theta$$

$$\Rightarrow v_0^2 = K^2 + K^2\tan^2\theta \Rightarrow K^2 = v_0^2/_{1+\tan^2\theta} \Rightarrow K = v_0\cos\theta \Rightarrow \tilde{K} \text{ bekannt}$$

Beispiel (Elektrischer Stromkreis)

Gemäß nebenstehender Skizze sei ein Stromkreis gegeben



Daten: Spannungsquelle $E = 30V$,
Widerstände $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$
Spuleninduktivitäten $L_1 = 0{,}02$ Henry, $L_2 = 0{,}04$ Henry

Anfangsbedingung: $I(0) = 0$,

I, I_1 und I_2 sind die gesuchten Stromstärken, wobei

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t)$$

sofort aus der Knotenregel folgt.

Im Kreis 1 ergibt sich die Spannungsbilanz

$$L_1 \dot{I}_1 + R_1 (I_1 + I_2) = E$$

Im Kreis 2 ergibt sich die Spannungsbilanz

$$L_2 \dot{I}_2 + R_2 I_2 - L_1 \dot{I}_1 = 0$$

Das System in geordneter Matrix-Schreibweise lautet demnach

$$\begin{cases} L_1 \dot{I}_1 + R_1 I_1 + R_1 I_2 = E \\ -L_1 \dot{I}_1 + L_2 \dot{I}_2 + R_2 I_2 = 0 \end{cases}$$

Lösung: [A] mittels Operatormethode:
Strategie: Löse L-Gleichung für I_1 und finde dann I_2 aus der ersten Gleichung

$$L = (L_1D + R_1)(L_2D + R_2) + R_1L_1D$$

$$= L_1L_2D^2 + L_1R_2D + R_1L_2D + R_1L_1D + R_1R_2$$

$$\Rightarrow LI_1 = L_1L_2\ddot{I} + (L_1R_2 + R_1L_2 + R_1L_1)\dot{I} + R_1R_2I = (L_2D + R_2)E$$
$$= R_2E$$

Es empfiehlt sich jetzt, die Zahlenwerte einzusetzen und die algebraische Rechnung zu ersetzen:

$$0{,}02 \cdot 0{,}04\,\ddot{I} + 1{,}0\,\dot{I} + 200\,I = 30 \cdot 20 = 600$$
$$\Leftrightarrow 8 \cdot 10^{-4}\,\ddot{I} + 1{,}0\,\dot{I} + 200\,I = 600$$
$$\Leftrightarrow 8\,\ddot{I} + 10^4\,\dot{I} + 2000000\,I = 6000000$$
$$\Leftrightarrow \ddot{I} + 1250\,\dot{I} + 250000\,I = 750000$$

Man hat demnach die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 1250\lambda + 250000 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -625 \pm \sqrt{-250000 + (625)^2} = -625 \pm \sqrt{140625}$$
$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -625 \pm 375 \Rightarrow \lambda_1 = -250 \text{ und } \lambda_2 = -1000$$

Da offenbar die Konstante $I_1 = 3$ eine spezielle Lösung ist, gilt

$$I_1(t) = C_1e^{-250t} + C_2e^{-1000t} + 3$$

ist die allgemeine Lösung der L-Gleichung.

§6 Die Methode der Matrix-Exponentialfunktion

Das Zentrum der Theorie der dynamischen (lin.) Systeme besteht – wenn es um die Beschreibung von Grund=zusammenhängen geht – in dem Netzwerk

deterministische Systeme $\Phi : \mathbb{R} \times E \to E$

Dynamisches Dgl-System $\dot{x} = Ax$

1-parameter-Gruppen von Operatoren (Flüsse)

Evolutionsoperator Matrix-Exponentialfunktion $e^{At} = \exp(At)$

Die Darlegung der abstrakten Zusammenhänge – auch für allgemeine Banachräume E – erfolgt in Kap. ... Dieser Abschnitt beschreibt in der Hauptsache Rechen=verfahren und deren unmittelbaren Hintergründe im Modellfall $E = \mathbb{R}^2$ – also für 2×2-Systeme.

§§1 Definition und Grundregeln für die Matrix-Exponentialfunktion

Def: Sei A $n\times n$-Matrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$ oder $\mathbb{C}^{n\times n}$.

$$\rightsquigarrow \boxed{\exp(A) = e^{A} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}}_{\in \mathbb{R}^{n\times n} / \mathbb{C}^{n\times n}}}$$

Matrix-Exponentialfunktion

Diese Reihe konvergiert sowohl in jedem Koeffientenplatz - als auch im Sinne jeglicher Normen für A — zB d. Operatornorm

$$\| e^A \|_\infty \leq \sum_0^\infty \frac{1}{n!} \|A\|_\infty^n = e^{\|A\|_\infty}$$

wobei $\| B \|_\infty = \sup_{\|x\| \leq 1} \{ \| B(x) \| \mid x \in \mathbb{R}^n \}$

und $\| y \|^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$ die euklid. Norm in $\mathbb{R}^n$ ist

In Adaption an die vertraute reelle Exponentialfunktion

$$e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

und der hieraus folgenden Gesetzmäßigkeiten finden wir

Theorem (Formelwelt der Matrix-Exponentialfunktion)

Seien A, B $n \times n$-Matrizen (in $\mathbb{R}^{n \times n}$ oder $\mathbb{C}^{n \times n}$)

(1) $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ Funktionalgleichung

Bem: $AB \neq BA \Rightarrow$ Beh. nicht notwendigerweise ~~richtig~~. falsch

$e^{A+B} \neq e^A \cdot e^B$ gilt also nicht allg.

Folgerung: $e^{-A} = (e^A)^{-1} \Rightarrow e^A$ stets invertierbar

$e^0 = Id \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$

(3) $\boxed{\det e^A = e^{\text{Spur} A} \ (>0)}$ Spurformel Liouville Formel

(4) $Ae^A = e^A A$ – insb. $Ae^{At} = e^{At} A \quad (t \in \mathbb{R})$

(5) $\boxed{e^A = \lim_{n\to\infty} \left(Id + \frac{1}{n} A \right)^n}$ Grenzwert-Formel

(6) $\boxed{J = T \circ A T^{-1} \Rightarrow e^J = T \circ e^A \circ T^{-1}}$ Ähnlichkeits-Prinzip

also: $e^A = T^{-1} \circ e^J \circ T$

(7) $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{tA}$ ist diff'bar und

$\boxed{\frac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA}}$ Matrix-Differentialgleichung $\dot{X} = AX$

⇝ Analogie zu $n=1$

Spezialfälle:

(i) $A^2 = I \Rightarrow e^{At} = \cosh t\, I + \sinh t\, A$

(ii) $A^2 = -I \Rightarrow e^{At} = \cos t\, I + \sin t\, A$

iii) $A^2 = A \Rightarrow e^{At} = I - A + e^t A$

iv) $A^2 = -A \Rightarrow e^{At} = I + A - e^{-t} A$

(v) $A^k = 0$ für $k \geq m+1 \Rightarrow e^A = Id + A + \dots + \frac{1}{m!} A^m$

Beweise: Alle zur Übung

Ü-Blatt Beweise Spezialfälle:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow e^{A+B} \neq e^A e^B$

$e^{A + 2\pi i k\, Id} = e^A$

also: $e^A = e^B \not\Rightarrow A = B$

§§ 2 Zusammenhang zur Differentialgleichung

Theorem: (Hauptsatz der Matrix-Exponentialfunktion)

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \quad x(t) = \underset{\uparrow \text{Matrix-Anw.}}{e^{At}}(x_0)}$$

Allgemeiner: Ist $\{b_1, \dots, b_n\} \subset \mathbb{R}^n$ eine Basis so ist

$$\{e^{At} b_1, \dots, e^{At} b_n\}$$

ein Fundamentalsystem der Dgl – es besteht aus n l.u. Lösungen der Dgl; speziell ist für $b_i = e_i$

$$\{e^{At}(e_1), \dots, e^{At}(e_n)\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{spaltenweise} \\ \text{gelesen}}}{\equiv} e^{At} \equiv W(t)$$

das kanonische Fundamentalsystem (Wronski-Matrix)

Folgerung: $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\Phi(t, x) = e^{tA}(x)$
– also $\Phi^t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\Phi^t(x) = e^{tA}(x)$

ist ein total deterministisches System

$$A(x) = \frac{d}{dt} \Phi^t(x)\Big|_{t=0} \equiv \text{Vektorfeld zu } \Phi$$

$\Rightarrow A(x) = \text{Matrix } A \cdot (x)$ da Φ^t lin. in x

$\Rightarrow$ Matrix A ist infinitesimaler Erzeuger der 1-parameter-Gruppe $t \mapsto \Phi^t$

& A geg $\Rightarrow \Phi^t = e^{tA}$ ist det. System zu A.

Beweis: Weil die Matrix e^{tA} stets invertierbar ist, sind für l.u. Vektoren $b_1 \in \mathbb{R}^n, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^n$ auch die Bildvektoren $e^{tA} b_1, \ldots, e^{tA} b_n$ l.u. – somit ein Fund.system.

Existenz: Für $x(t) = e^{At}(x_0)$ gilt nach §§ 1

$$\dot{x}(t) = A e^{At}(x_0) = A\,x(t) \quad \text{und} \quad x(0) = x_0 .$$

Eindeutigkeit: Sei $y(t)$ irgendeine Lösung des AWP

$$\dot{y} = Ay$$
$$y(0) = x_0$$

Matrix-Anw. = Produkt

$\Rightarrow$ sei $z(t) = e^{-tA}(y(t))$. Dann folgt mit Produkt-Regel

$$\dot{z}(t) = -Ae^{-tA}(y(t)) + e^{-tA}(\dot{y}(t)) = -Ae^{-tA}(y) + e^{-tA}(Ay)$$

vertauscht.

$$= -Ae^{-tA}y + Ae^{-tA}y \equiv 0$$

$$\Rightarrow z(t) = \text{const}(t) = z(0) = y(0) = x_0$$

$$\Rightarrow x_0 = e^{-tA}(y(t)) \Rightarrow e^{tA}(x_0) = y(t) = x(t) \quad \blacksquare$$

Fazit: Ist A gegeben, so liefert e^{At}

a) das Fundamentalsystem der Dgl $\dot{x} = Ax$

b) die Evolution – dh. das total deterministische System Φ, welches durch $\frac{d}{dt}\Phi^t \big|_{t=0} = A$ eindeutig bestimmt ist

c) $X(t) := e^{At}$ $\underbrace{\text{ist}}_{\text{eind.}}$ Lösung der Dgl $\underbrace{\dot{X} = AX}_{\text{Matrix-Dgl.}}$ mit $X(0) = \mathrm{Id}$ →

d) Die eind. Lösung der Matrix-Dgl

$$\dot{X} = AX \;,\; X(0) = B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

lautet: $X(t) = e^{At} \circ B$

35 6/5/2

<u>Theorem:</u>

Sei $p(\lambda) = \pm\det(A - \lambda\,\mathrm{Id}) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} \cdots + c_0$ das charakteristische Polynom von A

$\Rightarrow \Phi(t) = e^{At}$ ist eind. Lös. der Matrix-Dgl

$$\begin{cases} \Phi^{(n)} + c_{n-1}\Phi^{(n-1)} + \cdots + c_0\Phi \equiv 0 \\ \& \ \Phi(0) = \mathrm{Id},\ \Phi'(0) = A, \ldots, \Phi^{(n-1)}(0) = A^{n-1} \end{cases}$$

Bew. $\Phi := \Phi_1 - \Phi_2$ erfüllt Dgl mit Anf. Bed.

$$\Phi(0) = \ldots = \Phi^{(n-1)}(0) = 0$$

$\Rightarrow$ Koeffizientenweise Betrachtung (mischen sich nicht)

$\Rightarrow \Phi \equiv 0$

Dgl: $\Phi^{(k)} = A^k e^{At} = A^k \Phi$

$\Rightarrow \Phi^{(n)} + c_{n-1}\Phi^{n-1} + \cdots + c_0\Phi = \overbrace{\{A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_0\mathrm{Id}\}}^{=0 \text{ Cayley Hamilton}} \cdot \Phi$

Anf. Bed: $\Phi(0) = \mathrm{Id}$, $\Phi^{(k)}(0) = A^k$ ✓

§§3 Ähnlichkeitmethode, Jordan-Verfahren

Ziel: Konkrete Berechnung d. Evolution e^{tA}: $\boxed{n=2}$

Grundlage ist das Ähnlichkeitthm: $J = MAM^{-1} \Rightarrow e^J = Me^AM^{-1}$ und die Berechnung aller Matrix-Exponentialen e^A baut auf der Berechnung von genau 3 Typen von Jordan-Matrizen auf:

Grundbeispiel (Jordan-Matrizen)

① $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \Rightarrow e^A = \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\mu \end{pmatrix}$

② $A = \lambda \, \mathrm{Id} \quad \Rightarrow e^A = e^\lambda \, \mathrm{Id}$

③ $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow e^A = e^\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

④ $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow e^A = e^\alpha \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$

Herleitungen:

① $A^m \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \lambda^m & 0 \\ 0 & \mu^m \end{pmatrix} \Rightarrow$ Formel

② Spezialfall von ① $\lambda = \mu$

③ Sei $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow N^2 = N^3 \equiv 0 \Rightarrow e^N = \overbrace{\mathrm{Id} + N}^{= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Nun ist für $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \underbrace{\lambda \, \mathrm{Id} + N}_{\text{vertauschbar}} \Rightarrow$

$$e^A = e^{\lambda \mathrm{Id}} \circ e^N = e^\lambda \mathrm{Id} \circ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) Für $B = \beta\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist nach kurzer Überlegung:

$$B^2 = \beta^2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \beta^3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B^4 = \beta^4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Die Exponentialreihe erbringt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} = \underbrace{\sum_{\substack{j=0 \\ (k=2j)}}^{\infty} \frac{\beta^{2j}}{(2j)!}\begin{pmatrix} (-1)^j & 0 \\ 0 & (-1)^j \end{pmatrix} + \sum_{\substack{j=0 \\ (k=2j+1)}}^{\infty} \frac{\beta^{2j+1}}{(2j+1)!}\begin{pmatrix} 0 & (-1)^j \\ (-1)^{j+1} & 0 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 \\ 0 & \cos\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sin\beta \\ \sin\beta & 0 \end{pmatrix}$$

Folgerung: $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \underbrace{\alpha\, Id + B}_{\text{vertauschbar}}$

$$\Rightarrow e^A = e^{\alpha Id} \cdot e^B = e^\alpha \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

<u>Theorem</u> (Ähnlichkeitstheorem)

Ist $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben, so gibt es stets invertierbare Matrizen M, so daß

$$J = M^{-1} \circ A \circ M$$

eine Jordanform ist – somit vom Typ einer der Jordan-Matrizen der 3 (bzw. 4) Grundbeispiele ist

Folgerung: Sind J und M bekannt, so ist

$$\boxed{e^{At} = M \circ e^{Jt} \circ M^{-1}}$$ gefunden

Rezept: Vorgehensweise $\longleftrightarrow$ EW und Eigenraum-Dimension:

Fall 1: $\lambda \neq \mu \in \mathbb{R}$ seien zwei versch. reelle EW

und es seien $Au = \lambda u$, $Av = \mu v$ EV

$\rightsquigarrow$ Mit $M := (u \mid v)$ gilt also $M(e_1) = u$ $M(e_2) = v$

$$\Rightarrow A = M \circ J \circ M^{-1} \text{ mit } J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad //$$

Fall 2: $\lambda = \mu \Rightarrow$ 2 Fälle $\begin{cases} \dim \operatorname{Kern}(A - \lambda \mathrm{Id}) = 2 \\ \dim \operatorname{Kern}(A - \lambda \mathrm{Id}) = 1 \end{cases}$

im ersten (trivialen) Fall ist $A = \lambda \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow e^{A} = e^{\lambda} \mathrm{Id}$

im zweiten Fall geht es so:

Sei u EV zu λ, also $\operatorname{Kern}(A - \lambda \mathrm{Id}) = \operatorname{Lin}\{u\}$

so sei $x \in \mathbb{R}^2$ Lösung von

$$(A - \lambda \mathrm{Id})x = u \qquad (\Rightarrow Ax = u + \lambda x$$

woraus folgt: u, x l.u. $\Rightarrow M = (u \mid x)$ invertierbar

und $A = M \circ J \circ M^{-1}$ mit $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ //

Fall 3 Es ist $\lambda = \alpha \pm i\beta$ (komplex konj. EW, $\beta \neq 0$)

$$\Rightarrow M := \begin{pmatrix} a_{11} - \alpha, & -\beta \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist invertierbar und}$$

$$A = M \circ J \circ M^{-1} \quad \text{mit } J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad ///$$

Beweis: Dies besteht im Nachprüfen der Invertierbarkeit und der Richtigkeit der angegebenen Formeln.

zu (Fall 1): u, v l.u. $\Rightarrow M$ invertierbar $\Rightarrow$ mit $\begin{matrix} u_1 = u, v_1 = v \\ \lambda_1 = \lambda \ \lambda_2 = \mu \end{matrix}$

$$\Rightarrow M^{-1}(A(M(e_i)) = M^{-1}(A(u_i)) = M^{-1}(\lambda_i u_i) = \lambda M^{-1}(u_i)$$

$$= \lambda_i e_i =: J(e_i) \Leftrightarrow J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

zu (Fall 2) Da also x, u l.u. sind, gilt

$$M^{-1} A M (\underset{\binom{1}{0}}{e_1}) = M^{-1}(A(u)) = \lambda M^{-1}(u) = \lambda e_1$$

denn $e_1 \to u$ unter M, also $u \mapsto e_1$ unter M^{-1}

$$\& \ M^{-1} A M (\underset{\binom{0}{1}}{e_2}) = M^{-1}(A(x)) \underset{Ax - \lambda x = u}{=} M^{-1}(\lambda x + u)$$

$$= \lambda M^{-1}(x) + M^{-1}(u) = \lambda \binom{0}{1} + \binom{1}{0} = \binom{1}{\lambda}$$

$\Rightarrow J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ist die Ergebnis-Matrix

zu (Fall 3) ÜA: a) M invertierbar denn $\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\underbrace{-\det A + \left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)^2}_{\Delta}}$

$$\Delta = (a_{11} - a_{22})^2 + \underbrace{4 a_{12} a_{21}}_{\neq 0} \underset{\text{komplexer Fall}}{<} 0 \Rightarrow \text{Inv.}$$

b) Formel folgt. //

Beispiele

① $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 1+\sqrt{2},\ \mu = 1-\sqrt{2}$

Eigenvektoren sind $u = (\sqrt{2}, 1),\ v = (-\sqrt{2}, 1)$

$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ erfüllt die Ähnlichkeit

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

② $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \mu = 2,\ (A \neq 2\,\mathrm{Id})$

$\Rightarrow$ Hauptvektorfall liegt vor:

Eigenvektor: $A - 2\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ EV

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = (1, 0)\ \ (+\alpha\vec{u})$

$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ leistet das Gewünschte:

$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ also: $M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (stimmt!)

③ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 3 \pm i$, $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ nach Angabe

$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ wie gewünscht!

§§4: Sylvester-Methode (Idempotenz-Meth.)

Die Methode besteht i.w. darin, die gegebene Matrix A als Summe von vertauschbaren, idempotenten zu schreiben, so daß hieraus A^m und dann e^A gewonnen werden kann.

Darstellungsmethodisch unterscheiden wir die Fälle

(A) $\lambda \neq \mu$ (reeller Fall und komplex konj. Fall)

(B) $\lambda = \mu$ (wobei o.E. $\dim \operatorname{Kern}(A - \lambda \mathrm{Id}) = 1$ ist.

Fall (A): Sei $P = \dfrac{A - \mu \mathrm{Id}}{\lambda - \mu}$ und $Q = \dfrac{A - \lambda \mathrm{Id}}{\mu - \lambda}$

$\Rightarrow \operatorname{Kern} P = E_\mu$ und $\operatorname{Kern} Q = E_\lambda$ (Eigenräume)

P und Q sind "normierte"(*) Kern-Operatoren ($P e_\lambda = e_\lambda$)

Dabei ist es im komplexen Fall: $\lambda = \alpha \pm i\beta$ in der Tat so, daß $P, Q \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ ist (was aber der Methode egal ist)

(*) $\to \dfrac{A - \mu \mathrm{Id}}{\lambda - \mu}(e_\lambda) = e_\lambda$

<u>Satz</u> (Eigenschaften der normierten Kern-Operatoren

(i) $A = \lambda P + \mu Q$, $P + Q = \mathrm{Id}$

(ii) $PQ = QP = 0$ (Cayley-Hamilton-Theorem)

iii) $\operatorname{Bild} P = \operatorname{Kern} Q$ sowie $\operatorname{Bild} Q = \operatorname{Kern} P$

iv) $P^2 = P$ und $Q^2 = Q$ (Idempotenz, Grad 2)

(v) komplexer Fall: $\overline{P} = Q$

Beweise: & $P+Q = \frac{A-\mu Id-(A-\lambda Id)}{\lambda-\mu} = Id$ (42)

(i) $\lambda P+\mu Q = \lambda\frac{A}{\lambda-\mu} - \frac{\lambda\mu Id}{\lambda-\mu} + \frac{\mu A}{\mu-\lambda} - \frac{\mu\lambda Id}{\mu-\lambda} = A$

(ii) $(A-\mu Id)(A-\lambda Id) = 0$ nach Cayley-Hamilton

(wobei dies im $n=2$ auch mit Kern-Bild-Argumenten folgt (wie gesehen im Anhang))

iii) Da Kern P, Kern Q, Bild P, Bild Q alle 1-dimensional sind, folgt dies direkt aus ii)

$\to$ 6/15

iv) Man kann dies gemäß Kern $P \oplus$ Bild $P = \mathbb{R}^2\ (\mathbb{C}^2)$ oder aber einfach direkt:

$$P^2 = \left(\frac{A-\lambda Id}{\mu-\lambda}\right)^2 = \frac{1}{(\mu-\lambda)^2}\{\underbrace{A^2}_{=(\lambda+\mu)A-\lambda\mu Id \text{ (Cayley Hamilton)}}-2\lambda A+\lambda^2 Id\}$$

$$= \left\{(\lambda+\mu)A-\lambda\mu Id-2\lambda A+\lambda^2 Id\right\}\cdot\frac{1}{(\mu-\lambda)^2} =$$

$$= \frac{\mu A-\lambda A-\lambda(\mu-\lambda)Id}{(\mu-\lambda)^2} = \{A-\lambda Id\}\cdot\frac{1}{\mu-\lambda} = P$$

und für Q ist dies völlig symmetrisch.

(v) $\mu=\bar\lambda \Rightarrow \lambda-\mu = 2i\beta$ (für $\lambda=\alpha+i\beta$)

$$\Rightarrow \bar P = \overline{\frac{1}{2i\beta}}(A-\bar\mu Id) = -\frac{1}{2i\beta}(A-\lambda Id) = Q$$

Theorem (Exponentialformel I)

Im Falle $\lambda \neq \mu$ gilt

$$\boxed{e^{tA} = e^{\lambda t} P + e^{\mu t} Q}$$

Beweis: Aus $A = \lambda P + \mu Q$ folgt wegen $PQ = 0$

$$A^k = \lambda^k P^k + \mu^k Q^k \quad \forall k \geq 1 \quad (\text{falsch für } k=0)$$

Wegen $P^m = P$, $Q^m = Q$ $\forall m \geq 1$ gilt also

$$A^k = P\lambda^k + Q\mu^k \quad \forall k \geq 1$$

$$\Rightarrow \sum_0^\infty \frac{t^k A^k}{k!} = \mathrm{Id} + \sum_{k=1}^\infty \frac{t^k A^k}{k!} = \mathrm{Id} + \sum_{k=1}^\infty P\frac{(\lambda t)^k}{k!} + Q\frac{(\mu t)^k}{k!}$$

$$= \mathrm{Id} + P\sum_1^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} + Q\sum_1^\infty \frac{(\mu t)^k}{k!}$$

$$= \mathrm{Id} + P(e^{\lambda t} - 1) + Q(e^{\mu t} - 1)$$

$$= \mathrm{Id} + e^{\lambda t}P + e^{\mu t}Q - \underbrace{(P + Q)}_{= \mathrm{Id}} \quad \blacksquare$$

Bemerkung: Diese Formel gilt also auch im $\mathbb{C}$-Fall

denn $\underbrace{Pe^{\lambda t} + Qe^{\mu t}}$ $\in \mathbb{R}^{2\times 2}$ weil $\mu = \overline{\lambda}$, $Q = \overline{P}$

also $= 2\,\text{Realteil}\,(Pe^{\lambda t})$

(B) Fall $\lambda = \mu$: (und $A \neq \lambda \mathrm{Id}$)

Setze $P = A - \lambda \mathrm{Id} \Longrightarrow P^2 = 0$ (Cayley Hamilton)

$\rightsquigarrow A = P + \lambda \mathrm{Id}$

$$m \geq 1 \Longrightarrow t^m A^m = t^m (P + \lambda \mathrm{Id})^m = t^m \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} P^k \lambda^{m-k} \mathrm{Id}$$

$$\underset{\substack{k=0\\k=1}}{=} t^m \mathrm{Id}\, \lambda^m + m t^m \lambda^{m-1} P \,\mathrm{Id}$$

$$= t^m \lambda^m \mathrm{Id} + m t^m \lambda^{m-1} P \qquad (m \geq 1)$$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m A^m}{m!} = \mathrm{Id}\, e^{\lambda t} + P \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m t^m \lambda^{m-1}}{m!}$$

enthält $m=0$

$$= \mathrm{Id}\, e^{\lambda t} + P \cdot t \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(t\lambda)^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$= \mathrm{Id}\, e^{\lambda t} + P t \cdot e^{t\lambda}$$

$$= e^{\lambda t} (\mathrm{Id} + t \underbrace{(A - \lambda \mathrm{Id})}_{P})$$

$\Rightarrow$ <u>Theorem</u> (Exponentialformel II)

Im Falle eines doppelten EW gilt ($A \neq \lambda \mathrm{Id}$)

$$\boxed{e^{tA} = e^{\lambda t} (\mathrm{Id} + t(A - \lambda \mathrm{Id}))}$$

Bemerkung: (direkter Nachweis der Idempotenz von P, Q
Wir zeigen noch eine direkte Methode der Idempotenz:

Man benutzt: $\underbrace{(A-\mu Id)}_{\sim P}\underbrace{(A-\lambda Id)}_{\sim Q} = 0 \iff PQ = 0$
woraus die Kern-Bild-Beziehungen

$$\text{Bild } Q = \text{Kern } P = \text{Lin}\{e_\mu\}$$
$$\text{Bild } P = \text{Kern } Q = \text{Lin}\{e_\lambda\}$$

ist klar
$P(e_\lambda) = e_\lambda$
$Q(e_\mu) = e_\mu$
$\text{Kern} P = e_\mu$

folgen, e_λ, e_μ seien die entsprechenden EV.
Für $x \in \mathbb{R}^2$ gilt dann $P(x) \in \text{Lin}\{e_\lambda\}$

$$P(x) = \alpha e_\lambda \quad \text{mit einem } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow P(P(x)) = \frac{\alpha}{\lambda-\mu}(A-\mu Id)(e_\lambda) = \frac{\alpha}{\lambda-\mu}(Ae_\lambda - \mu e_\lambda)$$

$$= \frac{\alpha}{\lambda-\mu}(\lambda-\mu)e_\lambda = \alpha e_\lambda = P(x)$$

$$\Rightarrow P^2 = P \quad \text{wie gewünscht.}$$

Beispiele

(1) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} x \quad \rightsquigarrow \quad \lambda = 1, \; \mu = 3$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{tA} = e^{t}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + e^{3t}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} x \quad \rightsquigarrow \quad \lambda = \mu = 1$

$$\rightsquigarrow e^{tA} = e^{t}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\right\}$$

(3) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x \quad \rightsquigarrow \quad \lambda = 1+2i, \; \mu = 1-2i$

$$\rightsquigarrow P = \frac{1}{4i}\begin{pmatrix} 2i & -4 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow Q = \frac{1}{-4i}\begin{pmatrix} -2i & -4 \\ 1 & -2i \end{pmatrix} \quad (= \overline{P})$$

$$\Rightarrow e^{tA} = e^{t}(\cos 2t + i \sin 2t)\frac{1}{4i}\begin{pmatrix} 2i & -4 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$$

$$+ e^{t}(\cos 2t - i \sin 2t)\frac{1}{-4i}\begin{pmatrix} -2i & -4 \\ 1 & -2i \end{pmatrix}$$

$$= e^{t}\begin{pmatrix} \cos 2t & -2\sin 2t \\ \frac{1}{2}\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \quad (\text{reell!})$$

§§5 Verfahren von Cayley-Hamilton

Ergänzungen: Zur Berechnung von e^{At} gibt es noch weitere Verfahren (insb. im allg. Fall)

① Verfahren von Cayley-Hamilton: (vgl. Vogt/109/110)

Vorbem.: Da nach dem C-H-Thm $p_A(A) \equiv 0$ ist, gilt

$$A^n = a_0 \mathrm{Id} + \dots + a_{n-1} A^{n-1} \qquad (A \ n\times n\text{-Matrix})$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{tA} = \sum_0^\infty \frac{t^k A^k}{k!} = b_0(t)\,\mathrm{Id} + \dots + b_{n-1}(t) A^{n-1} \qquad \underline{\underline{n=2:}} \quad \boxed{e^{tA} = b_0(t)\,\mathrm{Id} + b_1(t) A}}$$

Hierbei können $b_0(t)$, $b_1(t)$ als Ansatz gewählt werden, die man dann so bestimmt:

$x = e_i$ einsetzen

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \leadsto \left\{ e^{\lambda_i t} = b_0(t) + b_1(t)\lambda_i \right\} \quad i = 1,2$$

$$\equiv 2\times 2 \text{ LGS für } b_0(t), b_1(t)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 \leadsto \left\{ \begin{array}{l} e^{\lambda t} = b_0(t) + b_1(t)\lambda \\ \& \quad t e^{\lambda t} = b_1(t) \end{array} \right\} \text{(Abl. nach } \lambda)$$

$$\equiv 2\times 2\text{-LGS-System (triviales System)}$$

Bsp. ① $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \leadsto \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$

$$\left\{ \begin{array}{l} e^t = b_0(t) + b_1(t) \\ e^{3t} = b_0(t) + 3 b_1(t) \end{array} \right\} \iff \begin{array}{l} b_1(t) = \frac{1}{2}(e^{3t} - e^t) \\ b_0(t) = \frac{1}{2}(3e^t - e^{3t}) \end{array}$$

$$\Rightarrow e^{tA} = \frac{1}{2}(3e^t - e^{3t})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(e^{3t} - e^t)\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \underset{\text{wie p16}}{\dots}$$

② s.R.

② $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$\Rightarrow b_1(t) = te^t \quad \Rightarrow b_0(t) = e^t - \overset{\overset{1}{\shortparallel}}{\lambda} b_1(t)$$
$$= e^t(1-t)$$

$$\Rightarrow e^{At} = e^t(1-t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + te^t\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^t(1+2t) \,, & -te^t \\ 4te^t \,, & e^t(1-2t) \end{pmatrix}$$
$$= e^t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + te^t\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

(wie p 16)

③ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \pm i$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} e^{it} &= b_0(t) + i b_1(t) \\ e^{-it} &= b_0(t) - i b_1(t) \end{aligned} \right\} \quad \text{beide Gl. äquivalent}$$

$$\overset{\text{"+", "-"}}{\Longleftrightarrow} \quad b_0 = \cos t, \ b_1 = \sin t$$

④ $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1/2} = 1 \pm 2i$

$$\Rightarrow e^t(\cos 2t + i \sin 2t) = b_0(t) + (1+2i) b_1(t)$$

$$b_1(t) = te^t(\cos t + i \sin t))$$

$\leadsto$ einsetzen ... HA

Bem: Es gilt also folgender Satz (48)

<u>Thm I</u> A $n\times n$ $\Rightarrow \exists\, b_0(t), \dots, b_{n-1}(t)$ ~~(eind)~~ falls alle Eigenräume 1-dim oder $\Leftrightarrow$ Minimalpol. = charakt. Pol

+Haupt.

$$\boxed{e^{tA} = \sum_{j=0}^{n-1} b_j(t) A^j}$$

Bestimmung der b_j als Lös. ein Lin. Gl. Syst.

Sei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ EW mit EV $u_1, \dots, u_n$

<u>Fall</u> $u_1, \dots, u_n$ l.u $\Rightarrow$

$$e^{tA}(u_k) = e^{t\lambda_k} u_k = \left(\sum_{j=0}^{n-1} b_j(t) \lambda_k^j\right) u_k$$

$$\Rightarrow \left[e^{t\lambda_k} = b_0(t) + b_1(t)\lambda_k + \dots + b_{n-1}(t)\lambda_k^{n-1} \right]$$

$k = 1, \dots, n$

Sonst: Ableiten nach λ

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \pm i$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} e^{it} = b_0(t) + b_1(t)\cdot i \\ e^{-it} = b_0(t) - b_1(t)\cdot i \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} b_0 = \cos t \\ b_1 = \sin t \end{array}$$

§§6 Verfahren von Leonard (49) 6/19

(2) Verfahren von Leonard:

Thm II (Satz von Leonard)

Ist $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$

$$\Rightarrow \boxed{e^{At} = b_0(t) Id + b_1(t) A + \dots + b_{n-1}(t) A^{n-1}}$$

wobei sich – im Unterschied zur Cayley-Hamilton-Methode – die unbekannten Funktion $b_k(t)$ als Lösungen eines entkopp. Dgl-systems n-ter Ordn. ergeben:

$$\left\{ b_k^{(n)} + a_{n-1} b_k^{(n-1)} + \dots + a_1 b_k' + a_0 b_k = 0 \right.$$

$$k = 0, \dots, n-1$$

mit den kanonischen Anf. Bed.

$$\left\{ \left(b_k(0), \dots b_k^{(n-1)}(0)\right) = e_{k+1} = (0 \dots; \overset{\substack{k+1.\text{ Stelle}\\ \downarrow}}{1}, 0 \dots) \right\}$$

$$(k = 0, \dots, n-1$$

$n = 2$: $e^{At} = b_0(t) Id + b_1(t) A$

$$\begin{cases} b_0'' + a_1 b_0' + a_0 b_0 = 0 & \& \ b_0(0) = 1, \ b_0'(0) = 0 \\ b_1'' + a_1 b_1' + a_0 b_1 = 0 & \& \ b_1(0) = 0, \ b_1'(0) = 1 \end{cases}$$

wobei $P_A(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = \det(A - \lambda Id)$ ist.

Bem λ_i bekannt $\rightarrow b_k(t) = \sum_1^n c_{kj} e^{\lambda_j t} \rightsquigarrow$ best. c_{kj} n. Anfangsw.

Beweis: Für $X(t) = e^{tA}$ gilt $X^{(k)} = A^k X(t)$, so daß für $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$L(X) := a_0 X^{(0)} + a_1 X^{(1)} + \dots + a_n X^{(n)} = P(A) \cdot X(t)$$

mit dem Polynom $P(A) = \sum_0^n a_k A^k$

Insbesondere folgt also nach Cayley-Hamilton:

Lemma: Ist $P_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$
Thm I (Leonard) das charakteristische Polynom zu A, also

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{Id})$$

$$\Rightarrow L(e^{tA}) = (P_A(A))e^{At} \equiv 0$$

Das heißt, $X(t)$ erfüllt die Dgl $\quad X(0) = \mathrm{Id},\ X'(0) = A,\ \dots\dots\ X^{(n-1)}(0) = A^{n-1}$

$$\boxed{X^{(n)}(t) + a_{n-1}X^{(n-1)} + \dots + a_0 X = L(X) = 0}$$

Und da dies eine "skalare" Matrix-Gleichung ist (dh. $a_k \in \mathbb{R}$) gilt diese Dgl simultan für alle Matrix-Koeff. $x_{jk}(t)$

Andererseits gilt ebenfalls für $Y(t) := \sum_0^{n-1} b_k(t) A^k$

$$Y^{(n)}(t) + a_{n-1}Y^{(n-1)} + \dots + a_0 Y = L(Y) = 0$$

weil dies für alle $b_k(t)$ gilt. Auch dies gilt koeff.weise

$$\Rightarrow (X - Y) \text{ erfüllt } L(\underbrace{X - Y}_{Z}) = 0 \quad \text{(auch koeff.weise)}$$

Nun ist $Z(0) = \dot{Z}(0) = \dots = Z^{(n-1)}(0) = 0$ nach Wahl der b_k
$\Rightarrow$ Beh (wobei man die Argumentation auch koeffweise führen kann)

Bsp 1 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{Id} - A) = (\lambda-2)^2(\lambda-3)$$
$$= (\lambda^2 - 4\lambda + 4)(\lambda - 3) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12$$

$\rightsquigarrow x''' - 7x'' + 16x' - 12x = 0$ hat allg. Lösung

$$x(t) = a_1 t e^{2t} + a_2 e^{2t} + a_3 e^{3t}$$

$\Rightarrow$ 1 | 0 | 0 Anf. Bed ergibt

$$x_1(t) = -6te^{2t} - 3e^{2t} + 4e^{3t}$$

0 | 1 | 0 Anf. Bed ergibt

$$x_2(t) = 5te^{2t} + 4e^{2t} - 4e^{3t}$$

0 | 0 | 1 Anf. Bed. ergibt

$$x_3(t) = -te^{2t} - e^{2t} + e^{3t}$$

Mit $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ folgt dann nach Formel

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & e^{3t} - e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} f$$

s. 21/a

52

6/21 a

Bsp. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow e^{At} = x_1 \, Id + x_2 A + x_3 A^2$$

$$= \left(-6te^{2t} - 3e^{2t} + 4e^{3t}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$\left(5te^{2t} + 4e^{2t} - 4e^{3t}\right) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} +$$

$$\left(-te^{2t} - e^{2t} + e^{3t}\right) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & , & 0 & , & -e^{2t} + e^{3t} \\ 0 & , & e^{2t} & , & -e^{2t} + e^{3t} \\ 0 & , & 0 & , & e^{3t} \end{pmatrix}$$

<u>Bsp 2</u> $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$

$\Rightarrow$ allg. Lösung zu $x''' + c_2 x'' + c_1 x' + c_0 x = 0$

(wobei $\det(\mu \mathrm{Id} - A) = \mu^3 + c_2 \mu^2 + c_1 \mu + c_0 = 0$)

ist $x(t) = a_1 e^{\lambda t} + a_2 t e^{\lambda t} + a_3 t^2 e^{\lambda t}$

$1|0|0$ – Anf. Bed $\rightsquigarrow$ $x_1 = \left(1 - \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2}\right) e^{\lambda t}$

$0|1|0$ – Anf. Bed $\rightsquigarrow$ $x_2 = (t - \lambda t^2) e^{\lambda t}$

$0|0|1$ – Anf Bed $\rightsquigarrow$ $x_3 = \frac{t^2}{2} e^{\lambda t}$

$\rightsquigarrow e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda t}$

alle dim Kern $(A - \lambda \mathrm{Id})^{1,2,}$: 1-dim.

§§7 Anwendung: Die Matrix-Dgl.

Gegeben sei die Matrix-Dgl

$$\dot{X} = AX + B \quad \text{mit } X = X(t) \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ gesucht}$$
und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ konstant
und $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Inhomogenität

$\boxed{A}$ homogene Gleichung: $X(0) = X_0$

Thm: Die Gleichung $\dot{X} = AX$ hat die allg. Lösung:

$$\dot{X} = AX \iff \exists X_0 \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ mit } X(t) = e^{tA} \circ X_0 \text{ und } X(0) = X_0$$

Bew. "$\Rightarrow$" Sei $X_0 = X(0)$ gesetzt und $\dot{X}(t) = AX$

Wir setzen $Y(t) = e^{tA} \circ X_0$, dann folgt

$$\dot{Y}(t) = A e^{tA} \circ X_0 = AY(t)$$

Nun gilt: $Y(0) = X(0) \Rightarrow X(t) = Y(t)$ nach dem Eindeutigkeitssatz für Dgl'n. Beziehungsweise: Wir definieren

$$Z(t) = e^{-tA} \circ X(t)$$

$$\Rightarrow \dot{Z}(t) = -Ae^{-tA} \circ X(t) + e^{-tA} \circ \dot{X}(t) = -Ae^{-tA} X(t) + \underbrace{e^{-tA} \circ A}_{= Ae^{-tA}} X$$

$$\Rightarrow \dot{Z}(t) \equiv 0 \Rightarrow Z(t) = \text{const} \in \mathbb{R}^{n\times n};\ Z(t) = Z(0) = X(0)$$

$$\Rightarrow X(t) = e^{tA} Z(t) = e^{tA} X(0).$$

"$\Leftarrow$" klar

B Die inhomogene Gleichung:

Hiezu macht man den Ansatz: VdK (wie im skalaren Fall.

$$\text{Sei } X(t) = e^{tA} \cdot Z(t)$$

Prinzip: Welche Gleichung erfüllt Z, wenn $\dot{X} = AX + B$?

$$\dot{X} = Ae^{tA} \cdot Z + e^{tA}\dot{Z} = AX + e^{tA}\dot{Z} \overset{!}{=} AX + B$$

$$\Longleftrightarrow \dot{Z} = e^{-tA} \circ B(t)$$ und wir erhalten

__Thm:__ Es gilt die Äquivalenz

$$\dot{X} = AX + B \Longleftrightarrow X(t) = e^{tA}\left\{X(0) + \int_0^t \underbrace{e^{-sA} \circ B(s)}_{\in \mathbb{R}^{n \times n}} ds\right\}$$

wobei die Matrix-Integration koeffizientenweise geschieht

Bemerkung: Sicher gibt es auch – analog zum skalaren Fall auch Ansatz-Methoden:

__Bsp:__ $B(t) = \text{const}$. Dann setzen wir A invertierbar voraus

$$\Rightarrow \dot{X} = AX + B \Rightarrow Y(t) = -A^{-1}B$$ ist spezielle Lösung

· Beispiel:

$$\dot{X} = AX + B \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>1. Schritt:</u> Berechnung von e^{tA}: Wir wählen die EV-Methode

$$\det(A - \lambda \mathrm{Id}) = (5-\lambda)(-1-\lambda) + 8 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm 1 = \begin{cases} 3 \rightsquigarrow e_1 = (1,1) \\ 1 \rightsquigarrow e_2 = (1,2) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Mit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, also $M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ gilt

$$A = M \circ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ M^{-1} = M \circ J \circ M^{-1}$$

$$\Rightarrow e^{tA} = M e^{tJ} \circ M^{-1} = M \circ \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} M^{-1}$$

Aufspaltung hilfreich

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^{3t}, & -e^{3t} \\ -e^{t}, & e^{t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2e^{3t} - e^{t}, & -e^{3t} + e^{t} \\ 2e^{3t} - 2e^{t}, & -e^{3t} + 2e^{t} \end{pmatrix}}_{\text{symmetrisch (wie es soll)}} \; //$$

$$= e^{3t}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + e^{t}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Dann erhält man die Inverse $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$ durch Ersetzen von t durch $(-t)$.

$\Rightarrow$ Die Allg. Lösung der <u>homogenen</u> Gleichung lautet

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2e^{3t} - e^{t}, & -e^{3t} + e^{t} \\ 2e^{3t} - 2e^{t}, & -e^{3t} + 2e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} \quad ///$$

Für die inhomogene Gleichung stellen wir die beiden Verfahren vor

(a) Ansatz: $Y(t) = const$ ist Lösung $\Longleftrightarrow Y = -A^{-1} \circ B$

Nun ist $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$

$$Y(t) = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \equiv \text{spez. Lös.}$$

(b) VdK-Formel: Es ist

$$X(t) = e^{tA}\left\{X(0) + \int_{(0)}^{t}(e^{-sA} \circ B)\,ds\right\}$$

Weil nun $B = const$ ist und weil Integrieren ein "linearer Prozess" wie auch die Matrix-Multiplikation ist, lautet die allg. Lösung in diesem Fall

$$X(t) = e^{tA}\left\{X(0) + \left(\int_0^t e^{-sA}\,ds\right) \circ B\right\}$$

Daher ist – mit $X(0) \equiv 0 \circ E$ die Formel

$$(*) \quad X_{sp}(t) = e^{tA} \circ \left(\int_0^t e^{-sA}\,ds\right) \circ B \longrightarrow \text{siehe } 26^a$$

eine spezielle Lösung. Offenbar müssen wir die Integration der inversen Exponentialmatrix e^{-sA} ausführen

$$\int_{(0)}^{t} e^{-sA}\,ds = e^{-3s}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & +\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & +\frac{1}{3} \end{pmatrix} + e^{-s}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\Bigg|_0^t$$

58 26/a

$$X_{sp}(t) = e^{tA} \circ \left(\int_0^t e^{-sA}\, ds \right) \circ B$$

$$\overset{(*)}{=} e^{tA} \circ \left(-A^{-1}\left(e^{-tA} - Id\right)\right) \circ B$$

$$= e^{tA} \left(A^{-1} - A^{-1} e^{-tA} \right) \circ B$$

$$= e^{tA} \circ A^{-1} \circ B - e^{tA} \circ \underbrace{A^{-1} \circ e^{-tA}}_{\text{vertauschbar}} \circ B$$

$$= e^{tA} \circ A^{-1} \circ B - A^{-1} \circ B$$

$$= \left(e^{tA} - Id\right) \circ A^{-1} \circ B =$$

Nun ist $e^{tA} \circ \underbrace{(A^{-1} \circ B)}_{Y}$ Lösung der hom. Dgl

$$\Rightarrow X(t)_{allg.} = \underbrace{e^{tA} \circ X_0}_{\text{hom.}} - \underbrace{A^{-1} B}_{\text{spez. Lösg}}$$

Fazit: VdK-Formel führt ebenfalls zum Ergebnis

$$* \quad \int_0^t e^{-sT}\, ds = T^{-1} \circ e^{-sT} \Big|_0^t \quad \text{für invertierbare } T$$

$$= e^{-3t}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1/3 \end{pmatrix} + e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & 5/3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}e^{-3t}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}}_{= A^{-1} \text{ (wie es sein soll)}}$$

Dann haben wir noch die Rechts-Links-Multiplikation mit e^{tA} und B zu tun:

Dabei ergibt $A^{-1}\circ B$ selbst schon die berechnete Matrix Y nach Methode a).

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\circ B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Weiterhin ist dann

$$\frac{1}{3}e^{-3t}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\circ B = \frac{1}{3}e^{-3t}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}e^{-3t}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\circ B = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Dann kommen wir zur Zeile $e^{tA}\left(\int_0^t e^{-sA}\,ds\right)\circ B =$

$$\left\{e^{3t}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + e^{t}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\right\}\circ\left\{\frac{1}{3}e^{-3t}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} + e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}e^{3t}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{3}e^{-2t}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}e^{t}\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Die allgemeine Lösung lautet

$$X(t) = \underbrace{e^{\overset{2}{\ominus} tA} X(0)}_{\text{Lösung d. hom. Gl}} + \underbrace{\left\{ \frac{4}{3} e^{3t}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} + e^{t}\begin{pmatrix}-1&1\\-2&2\end{pmatrix}\right\}}_{\text{Lösung d. hom. Gl.}} + \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&-3\\2&-6\end{pmatrix}}_{= X_\varphi \text{ nach a)}}$$

denn tatsächlich ist auch

$$\tilde{X}(t) = \frac{4}{3} e^{3t}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} + e^{t}\begin{pmatrix}-1&1\\-2&2\end{pmatrix} \text{ eine Lösung der hom. Gl.}$$

$$\text{denn } \tilde{X}(t) = e^{\overset{2}{\ominus} tA} \circ C = e^{3t}\begin{pmatrix}2&-1\\2&-1\end{pmatrix} + e^{t}\begin{pmatrix}-1&1\\-2&2\end{pmatrix} \circ C$$

$$= \frac{4}{3} e^{3t}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} + e^{t}\begin{pmatrix}-1&1\\-2&2\end{pmatrix} \quad \forall t$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}-1&1\\-2&2\end{pmatrix} \circ C \underset{(A)}{=} \begin{pmatrix}-1&1\\-2&2\end{pmatrix} \text{ und } \frac{4}{3}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} \underset{(B)}{=} \begin{pmatrix}2&-1\\2&-1\end{pmatrix} \circ C$$

$$C = \begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ -c_{11} + c_{21} = -1 \;\middle|\; -c_{12} + c_{22} = 1 \right\} \Leftrightarrow A$$

$$\text{und } \left\{ \underbrace{2c_{11} - c_{21} = 4/3}_{} \;\middle|\; \underbrace{2c_{12} - c_{22} = 0}_{} \right\} \Leftrightarrow B$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{ll} c_{11} = -5/3 & c_{12} = 1 \\ c_{21} = -2/3 & c_{22} = 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-5&3\\-2&6\end{pmatrix} \checkmark$$

d.h.: Auch $\tilde{X}$ ist von der allg. Form einer hom. Lösung: $e^{tA} \circ C$

Fazit: Wir sehen, daß der "Ansatz" nach a) trivial ist im Vgleich zur VdK-Formel.

Allerdings funktioniert dies a priori nur, wenn A inv. ist, bzw. wenn die Gleichung

$$A \circ X = -B$$

eine Lösung hat. Das ist genau dann der Fall, wenn die Spalten von B im Bildraum A liegen

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{X} = AX + B \text{ hat eine konstante Lösung} \\ \Longleftrightarrow \operatorname{Bild} B \subseteq \operatorname{Bild} A \subseteq \mathbb{R}^n \end{array} \right\|$$

Wie löst man dann den allg. Fall $\operatorname{Bild} A \subset \mathbb{R}^n$ wenn B beliebig ist – also nicht notwendigerweise $\operatorname{Bild} B \subset \operatorname{Bild} A$ erfüllt ist?

Dazu nutzt man die orthogonale Zerlegung

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Bild} A \oplus [\operatorname{Bild} A]^{\perp} = \operatorname{Bild} A \oplus \operatorname{Kern} A^t$$

Dann lösen wir das System spaltenweise (gewöhnl. System)

$$\boxed{\dot{x}_j(t) = A(x_j) + b_j} \qquad (j \in \{1, \dots, n\})$$

$$X = \begin{pmatrix} | & & | \\ x_1 & \cdots & x_n \\ | & & | \end{pmatrix}, \quad B = (b_1, \dots, b_n)$$

Fixieren wir einen Index j, so haben wir – unter Weglassen der Indizierung

$$\dot{x} = A(x) + b$$

zu lösen. Schreibe $x = x_0 + x_1$, $b = b_0 + b_1$ gemäß der Zerlegung, $x_0 \perp x_1$, $b_0 \perp b_1$

so sei y_0 mit $A(y_0) = -b_0$ und $y_1 = b_1$

$\Rightarrow x(t) = y_0 + t y_1$ erfüllt $\dot{x} = y_1$ und andererseits

$$A(x) + b = A(y_0) + tA(y_1) + b_0 + b_1 = -b_0 + 0 + b_0 + b_1$$

falls $y_1 \in \ker A$

$\{\Rightarrow \dot{x} = Ax + b\}$ im Falle $A = A^t$

Sonst: Andere Orthogonal-Zerlegung? ... nachdenken

§7 Substitutionsmethoden (63) 7/1

Die Koordinaten-Transformationsformel

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $v: U \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld

(*) ⇝ $\boxed{\dot{x} = v(x)}$

ist ein Dynamisches System, und wir halten noch einmal fest:

> Eine Lösung der Dgl ist eine Kurve $x(t)$
>
> $$x: I \to U$$
>
> mit $\dot{x}(t) = v(x(t))$.
> Der Tangentenvektor (= Geschwindigkeit der Bewegung $x(t)$) stimmt in jedem Punkt $x(t)$ mit dem dort mittels v vorgegebenen Vektor $v(x)$ überein

Ist nun $F: U \to V$ ein Diffeomorphismus (= invertierbar, mit invertierbaren Ableitungen

$$\partial F(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \in GL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$$

so läßt sich die Dgl (*) auf "natürliche Weise" nach V übertragen:

* zum einen wird jeder Punkt $x \in U$ eindeutig einem Punkt $y \in V$ via $y = F(x)$, $x = F^{-1}(y)$ zugeordnet
* Ist nun $x \in U$ und $v(x) \in \mathbb{R}^n$ der Richtungs-

vektor des gegebenen Vektorfeldes, so wird mittels

$$\mathcal{D}F(x)(v(x)) := w(y) \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $y = F(x)$ ist, ein Vektorfeld auf V definiert

<u>Kurz</u>: F transportiert x in $y = F(x)$
$\mathcal{D}F(x)$ transportiert $v(x)$ in $\mathcal{D}F(x)(v)$

<u>Theorem:</u> (Koordinaten-Transformation)

Die dynamischen Systeme

$$\begin{cases} \dot{y} = w(y) \\ \dot{x} = v(x) \end{cases}$$

entsprechen sich eindeutig. Das heißt.

$x(t)$ ist eind. Lösung des AWP

$$\dot{x}(t) = v(x(t)) \quad \text{mit } x(0) = x_0 \in U$$

$\Longleftrightarrow$ $y(t) := F(x(t))$ ist eind. Lösung des AWP

$$\dot{y}(t) = w(y(t)) \quad \text{mit } y(0) = y_0 = F(x_0) \in V$$

Beweis: $$\frac{d}{dt} F(x(t)) = \mathcal{D}F(x(t)) \cdot \dot{x}(t) = \mathcal{D}F(x(t)) \cdot v(x(t))$$
$$= w(y(t)) \quad \text{nach Def. von } w$$

Umkehrung: Wende gleiche Rechnung mittels der Inversen F^{-1} an.

Bemerkung: Man erhält also das Vektorfeld w folgendermaßen:

Ist $y \in V \rightsquigarrow w(y) = DF(x)(v(x))$

$$\Longleftrightarrow \boxed{w(y) = DF(F^{-1}(y))\, v(F^{-1}(y))}$$

und dies ist eine "nur formal von $y \in V$" abhängige Funktion – dh ein Vektorfeld auf V.

1. Bsp: 7/6 + 7/7 (zu a) — 2 Ziele: a) Gegeben F $\rightsquigarrow$ suche Lösungen der neuen Dgl

~~4.~~ 2. Beispiel (zu b) — b) Suche F, damit neue Dgl. vorgegebene Struktur hat

$$(1) \left\{ \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 \end{aligned} \right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{x} = v(x) \text{ mit } v(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$$

Unser Ziel ist, (1) zu überführen in ein entkoppeltes System (System in direkter Produkt-Form) mittels einer zu suchenden Transformation

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{y}_1 &= \alpha y_1 \\ \dot{y}_2 &= \beta y_2 \end{aligned}$$

wobei α, β noch zu finden sind.

Da v selber eine lineare Abbildung ist, ist

$$T_v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{mit } T_v^{-1} = T_v)$$

und die gesuchte Transformation $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

ist wieder eine lineare Abbildung (da das Ergebnis-Vektorfeld wieder linear ist)

Ist dann $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der gesuchte (lineare) Diffeomorphismus, so ist $\forall x \in \mathbb{R}^2$

$$DF(x) = F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

und wir haben die Forderung

$$W(y) = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}}_{W}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = DF(F^{-1}(y))\, v(F^{-1}(y))$$

groß W ($=T_w$)

$w(F(x)) = DF(x) < v(x)$

$w \circ F = DF < v > = F(v)$

$$\boxed{W = F \circ T_v \circ F^{-1}}$$

$\Rightarrow$ Eigenwertproblem.

$F^{-1} w F = v \Rightarrow \boxed{}$

Da W Diagonalform – also Jordanform – hat, bestimmen wir W als Jordan-Form für T_v – dann ist F automatisch die Matrix der Eigenvektoren zu T_v. T_v ist überdies reell und symmetrisch $\Rightarrow$ daher gibt es in der Tat eine Eigenvektor-Basis des $\mathbb{R}^2$:

$$\det(T_v - \lambda I) = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \text{ (Eigenwerte)}$$

$$\lambda_1 = 1 \rightsquigarrow T_v - \lambda\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow e_1 = c(1,1)$$

$$\lambda_2 = -1 \rightsquigarrow T_v - \lambda\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow e_2 = c(1,-1)$$

$e_1 \perp e_2$ (wie die Theorie es vorhersagt.)

$\rightsquigarrow F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ leistet das gewünschte

und $W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv$ Jordan-Matrix von T_v

Fazit: $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

ist die gesuchte Transformation, welche die Dgl (1) überführt in

$$\dot{y} = F(v(F^{-1}(y)))$$
$$= F \circ T_v \circ F^{-1}(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \dot{y}_1 = y_1 \\ \dot{y}_2 = -y_2 \end{matrix} \right\}$$ entkoppeltes System Form: "Direktes Produkt"

<u>Folgerung</u>: Das vorstehende Beispiel begründet folgendes

<u>Theorem</u> (Eigenwerte und entkoppelte ("direkte") Systeme

Sei $\dot{x} = Tx$, T $n \times n$-Matrix, $\in \mathbb{R}^{n \times n}$

ein lineares System mit konstanten Koeffizienten. Angenommen, es gäbe eine Basis des $\mathbb{R}^n$ mit Eigenvektoren $b_1, \ldots, b_n$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, dann ist

$$\boxed{\dot{x} = Tx \iff \dot{y} = Jy} \quad \text{mit } J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Beweis: Sei $F^{-1} = (b_1, \ldots, b_n)$, $y = Fx \Rightarrow$ Behauptung noch ausführen

Lefschetz – Systeme

vgl. U 10 / Aufg. 10/2

68

1. Beispiel: Polarkoordinaten

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_1\end{aligned}\right\}\qquad F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[$$

$$F(x_1, x_2) = (r, \varphi) = (y_1, y_2)$$

$$= \left((x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \arctan x_2/x_1\right)$$

$$F^{-1}(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

$$\Rightarrow W(y) = DF(x_1, x_2)(x_2, -x_1)$$

Nun ist $DF(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{r} , & \frac{x_2}{r} \\ \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow DF(x_1, x_2)(x_2, -x_1) = (0, -1)$$

$\Rightarrow$ das (r, φ) System lautet

$$\left\{\begin{aligned}\dot{r} &= 0\\ \dot{\varphi} &= -1\end{aligned}\right\}$$

HA (aus Klausur Febr. 2015)

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= -cy + x\, f(r)/r\\ \dot{y} &= cx + y\, f(r)/r\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned}\dot{r} &= f(r)\\ \dot{\varphi} &= c\end{aligned}\right. \qquad \text{(entkoppelt)}$$

Beispiel (Lefschetz-System)

$$\begin{cases} \dot{x} = -cy + x/r\, f(r) \\ \dot{y} = cx + y/r\, f(r) \end{cases}$$

Wie lautet das System in Polarkoordinaten?
Nach Bsp. (1) ist

$$DF(\cancel{x}, y) = \begin{pmatrix} x/r, & y/r \\ -y/r^2, & x/r^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow DF(x,y)\langle \dot{x}, \dot{y} \rangle =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -cy + x\, f(r)/r \\ cx + y\, f(r)/r \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -c\frac{xy}{r} + x^2 \frac{f(r)}{r^2} + c\frac{xy}{r} + y^2 \frac{f(r)}{r^2} \\ +c\frac{y^2}{r^2} - \frac{xy}{r^3} f(x) + c\frac{x^2}{r^2} + \frac{xy}{r^3} f(r) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} f(r) \\ c \end{pmatrix}}}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \dot{r} = f(r) \\ \dot{\varphi} = c \end{Bmatrix}$$ entkoppeltes System

§8 Das Reduktionsverfahren von d'Alembert (1717-83)

Sowohl für skalare lin. Differentialgleichungen höherer (n ter) Ordnung als auch für homogene lineare ($n \times n$) Systeme

$$\dot{x} = A(t)x \quad \text{mit } A(t) \; n\times n \text{ (o.E. } A \text{ stetig)}$$

ist ein einfaches Verfahren bekannt, daß wie folgt verläuft.

> Kennt man eine Lösung ($\neq 0$), so läßt sich das Problem der Findung des Fundamentalsystem reduzieren auf ein $(n-1)\times(n-1)$ - System (bzw auf eine Dgl nur $(n-1)$ ter Ordnung $\Rightarrow$ siehe Dgl-V.)

Die besondere Bedeutung besteht auch in der Tatsache, daß somit auch (lineare) nicht-autonome Systeme methodisch erreicht werden.

Theorem (d'Alembert - Reduktion)

Es sei $u: I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Systems

$$\dot{u} = A(t)u \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11}, & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}, & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ (stetige } a_{ij}(t))$$

Sei nun für $u = (u_1, \dots, u_n)$ die Komponente $u_1(t) \neq 0$ in I

Dann betrachten wir das $(n-1)\times(n-1)$ - System

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v}_j = \sum_{k=2}^{n} \left(a_{jk}(t) - \frac{u_j(t)}{u_1(t)} a_{1k}(t) \right) v_k =: \sum_{k=2}^{n} b_{jk}(t) v_k \\ \text{mit } 2 \leq j \leq n \end{array} \right.$$

– also $\dot{v} = Bv$ und $B = (b_{jk})_{2 \le j,k \le n}$

so gilt: Ist $\{v^2 = (v^2_2, \dots, v^2_n), \dots, v^n = (v^n_2, \dots, v^n_n)\}$

eine Fundamentbasis für $\dot{v} = Bv$,

so ist mit

$$\varphi_j(t) = \int_{(0)}^{t} \left(\frac{1}{u_1(t)} \sum_{k=2}^{n} a_{1k} v_k^j \right) dt$$

$$\{ u(t),\ \varphi_2(t) u(t) + \underbrace{(0, v^2)}_{\in \mathbb{R}^n}, \dots, \varphi_n(t) u(t) + \underbrace{(0, v^n)}_{\in \mathbb{R}^n} \}$$

ein Fundamentalsystem von $\dot{u} = Au$ gefunden

Bem: Eine methodische Zusammenfassung kann so gegeben werden: (für den Fall $u_1 \neq 0$):

Ausgangsmatrix

1. Zeile $(a_{11}, \dots, a_{1n})$

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ \hline \begin{matrix} a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{matrix} & \underbrace{\tilde{A}}_{n-1} \end{array} \right) \Big\}\, n-1 \qquad C = \left(a_{12}\, \hat{u} \;\Big|\; \dots \;\Big|\; a_{1n}\, \hat{u} \right)$$

1. Spalte $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$

mit $\hat{u} = \frac{1}{u_1}(u_2, \dots, u_n)$

und $u = (\underset{\neq 0}{u_1}, \dots, u_n)$ gegebene Lösung von $\dot{u} = Au$

$\Rightarrow$ $B := \tilde{A} - C$ ist $(n-1) \times (n-1)$

und man hat das Fundamentalsystem von B zu bestimmen

Beweis: Ausgangspunkt ist die Möglichkeit – angepaßt an die Vorgaben des Theorems folgende Form der Funktionsdarstellung als "Lösungsansatz" zu benutzen:

<u>1. Lemma:</u> Sei $u: I \to \mathbb{R}^n$ C^1 mit o. E. $u_1(t) \neq 0$ in I
Dann gilt:

$$y: I \to \mathbb{R}^n \iff \exists \varphi: I \to \mathbb{R}\ (C^1) \text{ und } z: I \to \mathbb{R}^n \text{ mit } z_1 = 0$$

$$y(t) = \varphi(t)u(t) + z(t)$$

dh: es gilt mit $z =: (0, v)$: die Aussage

$$\boxed{y(t) = \varphi(t)u(t) + (0, v(t))} \text{ mit } v: I \to \mathbb{R}^{n-1}$$

Beweis: Man setzt $\varphi(t) = y_1(t)/u_1(t)$ und

$$z_k(t) := y_k(t) - \varphi(t) \cdot u_k(t) \quad (k = 2, \dots, n)$$

dann ergibt sich sofort die Behauptung

<u>2. Lemma:</u> Sei $\dot{u} = Au$ und $u_1 \neq 0$. Verwenden wir für $y: I \to \mathbb{R}^n$ die Form zuvor, so gilt

$$\dot{y} = Ay \iff \dot{\varphi}(t) = \frac{1}{u_1} \sum_{2}^{n} a_{1k} v_k \quad \text{und}$$

$$\dot{v} = \underbrace{B}_{(n-1)\times(n-1)} v \quad \text{mit } b_{jk} = \left(a_{jk} - \frac{u_j}{u_1} a_{1k}\right) \quad j,k = 2, \dots k$$

Herleitung: $y = \varphi u + z \Rightarrow$

$$\dot\varphi u + \underbrace{\varphi \dot u}_{} + \dot z = \dot y = Ay = \varphi A u + Az$$

$$\Longleftrightarrow \quad \dot\varphi u + \dot z = Az \quad , \quad z = (0, v(t))$$

Schreibt man diese Gleichung aus, so kann man sehen, daß alle Angaben – vor allem wegen $z_1 = 0$ – folgen

$$\dot\varphi(t)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dot v_2 \\ \vdots \\ \dot v_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{pmatrix}}_{=\text{Matrix } A \text{ ohne 1. Spalte } (z_1 = 0)} \begin{pmatrix} v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 1. Komponente ergibt: $\quad \dot\varphi(t) \cdot u_1 = \sum_{k=2}^{n} a_{1k} v_k \qquad (*)$

$\Rightarrow$ j Kompente ergibt ($j \geq 2$) $\quad \dot v_j = \sum_{k=2}^{n} a_{jk} v_k - \dot\varphi u_j \qquad (**)$

Fügt man in (**) die Gleichung (*) für $\dot\varphi$ ein, so ist

$$\dot v_j = \sum_{k=2}^{n} a_{jk} v_k - \frac{u_j}{u_1} \sum_{k=2}^{n} a_{1k} v_k = \sum_{2}^{\infty} \underbrace{\left(a_{jk} - \frac{u_j}{u_1} a_{1k}\right)}_{b_{ik}} v_k$$

$(j = 2, \dots, n)$

und v erfüllt $\dot v = Bv$

3. Lemma: Ist $\{v^2, \ldots, v^n : I \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}\}$ ein Fundamentalsystem der B-Gleichung

$$\dot{v} = Bv$$

so erhalten wir mit den entsprechenden y-Funktionen:

$$y^1(t) := u(t)$$

$$y^j(t) := \varphi_j(t) u(t) + z^j(t) \qquad , \; j = 2, \ldots, n$$

$$\text{wobei } z^j(t) = (0, v^j(t))$$

$$\varphi_j(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{u_1} \sum_{k=2}^{n} a_{1k} v_k^j(t)$$

ein Fundamentalsystem der A-Gleichung.

Beweis: Zu zeigen ist die lin. Unabhängigkeit der y^j

Sei $\lambda_1 y^1 + \ldots + \lambda_n y^n \equiv 0 \quad \forall t \in I$

$$\Leftrightarrow \; 0 = \lambda_1 u + \lambda_2 [\varphi_2 u + z^2] + \ldots + \lambda_n [\varphi_n u + z^n]$$

Allein die 1. Komponente ergibt wegen $z_1^j = 0$ $(j = 2, \ldots, n)$

$$0 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 \varphi_1 u_1 + \ldots + \lambda_n \varphi_n u_1 = (\lambda_1 + \lambda_2 \varphi_1 + \ldots + \lambda_n \varphi_n) \underset{\neq 0}{u_1}$$

Da nun aber $\varphi_j(t_0) = 0$ ist, folgt $\lambda_1 = 0$

$$\Rightarrow \sum_2^n \lambda_j (\varphi_j u + z^j) = 0 \overset{t = t_0}{\Longrightarrow} \sum_2^n \lambda_j v^j(t_0) = 0$$

Wäre nun $\{\lambda_j\} \neq 0 \Longrightarrow \{v^j\}$ l.a. in t_0 $\underset{\text{s.R. Theorie}}{\overset{\text{Wronski}}{\Longrightarrow}}$ $\{v^j\}$ l.a. in I ∎

Bemerkung: Für den häufigen Fall $n=2$ ergibt das folgende Folgerung

Folgerung: Sei $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ eine Lösung des lin. Systems

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = a_1 u_1 + b_1 u_2 \\ \dot{u}_2 = a_2 u_1 + b_2 u_2 \end{cases} \quad \& \ A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \ C^1 \text{ auf } I$$

und es sei (o.E. $u_1 \neq 0$ in I)

$\Rightarrow$ eine weitere (von u unabh. Lösung) findet man mit dem ~~Ansatz~~

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \varphi(t) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}, \quad y : I \to \mathbb{R}$$

und dann ist $\boxed{\dot{\varphi} = \frac{1}{u_1} \cdot b_1 y, \quad \dot{y} = \left(b_2 - \frac{u_2}{u_1} b_1\right) y}$

wobei man dann so vorgeht:

1\. Schritt: Löse die separierte Dgl. $\frac{\dot{y}}{y} = \left(b_2 - \frac{u_2}{u_1} b_1\right)(t)$

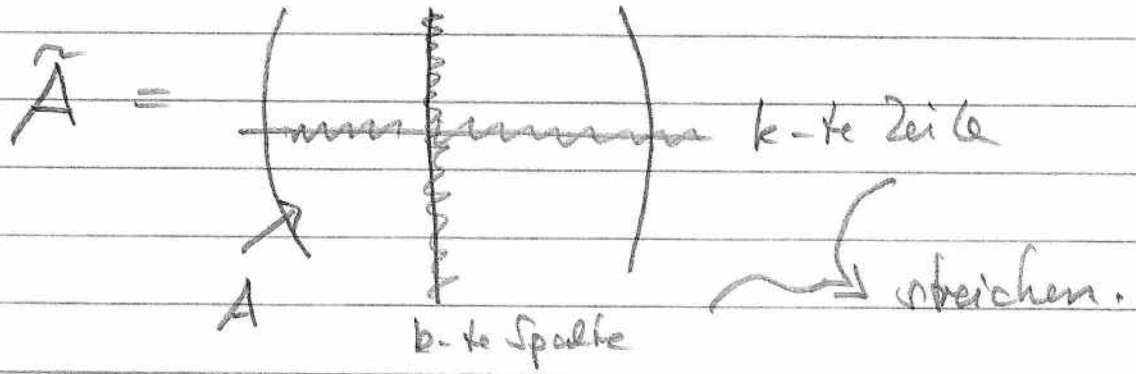
2\. Schritt: Bestimme φ via Einsetzen einer Lösung y durch Integration

Bemerkung: Sowohl die Integrationskonstante als auch diejenige, die in der y-Gleichung auftritt, bewirkt nur eine Änderung um eine u-Funktion

Bemerkung: Für den Fall, daß für eine andere Komponente von u (u_k mit $1 \le k \le n$) die Anwendbarkeitsprämisse

$$u_k(t) \neq 0 \quad \text{in } I \subset \mathbb{R}$$

zutrifft, benennt man entweder die Komponenten um oder bildet die $(n-1)\times(n-1)$-Submatrix



und verfährt analog; Alle Summen $\sum\limits_{2}^{n}$ werden durch $\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}$ ersetzt. $\blacksquare$

Beispiele ① (Heuser, p 508)

$$\left\{\begin{aligned} \dot u_1 &= \tfrac{t+1}{t-1}\, u_1 + u_2 \\ \dot u_2 &= u_1 + u_2 \end{aligned}\right\}, \quad I = \,]1,\infty[$$

Ein Polynomansatz zeigt, daß $u = u^1 = (t-1, -t)$ eine Lösung ist (oder: Probieren

Hier ist $A = \begin{pmatrix} \frac{t+1}{t-1} & 1 \\ 1 & \boxed{1} \end{pmatrix}$ und $u_1^1 = t-1 \neq 0$ in $t > 1$

$\tilde A$

Gemäß Theorem haben wir das System (1×1)

$$\dot{v}_2 = \left(a_{22}(t) - \frac{u_2(t)}{u_1(t)} a_{12}\right) v_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{v}_2 = \left(1 - \frac{(-t)}{t-1} \cdot 1\right) v_2 = \underbrace{\frac{2t-1}{t-1}}_{2+\frac{1}{t-1}} v_2$$

das ist eine separierte Dgl

$$\Rightarrow \quad \ln v_2 = 2t + \ln|t-1| + c$$

$$v_2(t) = K(t-1)e^{2t} \quad \text{mit } K \in \mathbb{R}.$$

Dann ist noch die Ansatzfunktion $\varphi(t)$ zu bestimmen:

$$\varphi(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{t-1} \cdot 1 \cdot K(t-1)e^{2t}\right) dt = \tilde{K}(e^{2t}-1)$$

$$\tilde{K} = \tfrac{1}{2}K$$

⇝ Fundamentalsystem des Ausgangssystem ist

$$\{u, y^2\} = \left\{\begin{pmatrix} t-1 \\ -t \end{pmatrix}, \tilde{K}(e^{2t}-1)\begin{pmatrix} t-1 \\ -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} t-1 \\ -t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (t-1)(e^{2t}-1)\frac{1}{2}K \\ -t\,(e^{2t}-1)\frac{1}{2}K + K(t-1)e^{2t} \end{pmatrix}\right\}$$

$$\overset{K=2}{=} \left\{\begin{pmatrix} t-1 \\ -t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (t-1)e^{2t} & -(t-1) \\ (t-2)e^{2t} & \underbrace{-t}_{} \end{pmatrix}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{pmatrix} t-1 \\ -1 \end{pmatrix}, e^{2t}\begin{pmatrix} t-1 \\ t-2 \end{pmatrix}\right\} \text{ Fundsystem} \longrightarrow \equiv u$$

<u>Beispiel</u> :
$$\begin{cases} 2t^2\dot u_1 = -tu_1 + u_2 \\ 2t\dot u_2 = tu_1 + u_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot u_1 = -\frac{1}{2t}u_1 + \frac{1}{2t^2}u_2 \\ \dot u_2 = \underbrace{\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2t}u_2}_{F(u_1,u_2)} \end{cases}$$

Eine kurze Überlegung hinsichtlich der Gradzahlen läßt den Lösungsansatz

$$u_1 = a = \text{const}$$
$$u_2 = bt + c$$

geraten erscheinen.

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = -ta + (bt+c) \\ 2tb = ta + (bt+c) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $c = 0$, $a = b$. (Lösung modulo Vielfache!)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \text{ ist eine Lösung.}$$

In der weiteren Vorgehensweise <u>kopieren</u> wir das komplette Verf.:

(1) Jedes $y(t) : I \to \mathbb{R}^2$ läßt sich schreiben

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \cdot \varphi(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ v_2(t) \end{pmatrix} \quad \left(\text{nämlich mit } \varphi(t) = y_1,\ v(t) = y_2 - t\varphi(t)\right)$$

$$\Rightarrow \dot y(t) = \dot\varphi \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}}_{u} + \varphi \underbrace{\begin{pmatrix} \dot 1 \\ \dot t \end{pmatrix}}_{\dot u} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dot v_2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} F(y)$$

$$\Leftrightarrow \dot y(t) = \dot\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix} \dot 1 \\ \dot t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dot v_2 \end{pmatrix} = \varphi F\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + F\begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \dot\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dot v_2 \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2t^2}v_2 \\ \frac{1}{2t}v_2 \end{pmatrix}$$

1. Komponente: $\dot{\varphi} = \frac{1}{2t^2} v_2$

2. Komponente: $t\dot{\varphi} + \dot{v}_2 = \frac{1}{2t} v_2$

$\dot{\varphi}$ einsetzen

$$\Rightarrow \dot{v}_2 = \left(\frac{1}{2t} - \frac{1}{2t}\right) v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \text{const.} = a$$

o.E.: $a = 1$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \int \frac{1}{2t^2} = -\frac{1}{2t} \quad (+k)$$

$$\Rightarrow \text{Lösungsraum} = \mathrm{Lin}\left\{ \overset{u^1}{\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}}, \overbrace{\left[-\frac{1}{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]}^{y} \right\}$$

$$= \mathrm{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} \\ -\frac{1}{2}+1 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/t \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Probe: Ist $u^2 = \begin{pmatrix} -1/t \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung? ja

$$2t^2\left(\frac{1}{t^2}\right) \stackrel{?}{=} -\frac{-t}{t} + 1 = 1+1 = 2 \checkmark$$

$$0 = -\frac{t}{t} + 1 = -1+1 \checkmark$$

<u>Beispiel</u> 3 (Suchen: 3×3, t-abh. Matrix)

$\dot{u}_1 = \frac{1}{t} u_1 - u_2$ (Walter 1+2)

$\dot{u}_2 = \frac{1}{t^2} u_1 + \frac{2}{t} u_2$

Kap: Lineare Systeme

§1 Lineare Abhängigkeit / Unabhängigkeit

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein gegebenes (Zeit-) Parameter-Intervall, $n \in \mathbb{N}$ eine fixierte Dimension, $t_0 \in I$

Sei $A(t)$ $n \times n$-Matrix (mit auf I stetigen $a_{ij}(t)$)
sei $h \in C(I, \mathbb{R}^n)$ gegebene Inhomogenität

$$(1) \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{y} = Ay + h \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right\}$$

heißt lineares dyn. System mit Anf.wert-Bedingg.
Ist $A = $ const Matrix $\rightsquigarrow$ System autonom

Bekannt: (1) besitzt genau eine Lös-g.
Begründung: (1) genügt dem E&E Satz von Picard-Lindelöf, da Dgl bzgl. y linear
allgemeiner:

Theorem (1. Hauptsatz für lineare Systeme)

① Das inhomogene System (1) besitzt genau eine Lösung

② Ist $L(y) = \dot{y} - Ay$, so ist $\dim \operatorname{Kern} L = n$

Folgerung: Jede Basis von Kern L besteht aus aus genau n lin. unabh. Funktionen

⇝ Jede Basis von Kern L heißt Fundamentalsystem

⇝ Sind $\{y_1, \ldots, y_n\}$ eine Basis, so heißt

$$W(t) = \begin{pmatrix} | & & | \\ y_1 & \cdots & y_n \\ | & & | \end{pmatrix} \quad n \times n\text{-Matrix}$$

Wronski-Matrix des Systems L

Sie ist also ein spaltenweise geordnetes Anordnen der n Lösungen der homogenen Dgl.

Bew. Es seien $y_1, \ldots, y_n$ die nach dem P.-L. E&E Satz eindeutig existierenden Lösungen von

$$L(y_k) = 0 \quad \text{mit} \quad y_k(t_0) = e_k = (0 \cdots, \overset{k\text{-te Stelle}}{1}, 0 \cdots 0)$$

Ist dann $L(y) = 0$ und $y_0 = y(t_0) = (y_{0_1}, \ldots, y_{0n})$

$$\Rightarrow y(t) \text{ und } \tilde{y}(t) = \sum_{k=1}^{n} y_{0k} y_k(t)$$

erfüllen: $L(y - \tilde{y}) = 0$ und $(y - \tilde{y})(t_0) = 0$

$\Rightarrow y \equiv \tilde{y}$. nach (Eind. Teil des P.-L.-Thms)

A3

Definition (lineare Abhängigkeiten)

Es seien $y_1(t), \dots, y_m(t)$ m Funktionen,

dh. $y_k : I \to \mathbb{R}^n$, $y_k \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$

Dann heißt $\{y_k\}$ <u>l.a. Funktionsfamilie</u>

$\Leftrightarrow$ $\{y_k\}$ ist l.a als Elemente des VR $C^1(I,\mathbb{R}^n)$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \exists\, c_1,\dots c_m \in \mathbb{R} \text{ mit } (c_1,\dots,c_m) \neq 0 \\ \text{mit } c_1 y_1(t) + \dots + c_m y_m(t) \equiv 0 \quad \forall t \in I \end{array}}$$

Ansonsten nennt man $\{y_k\}$ lu (in $C^1(I,\mathbb{R}^n)$)

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{m} c_k y_k(t) = 0 \ \forall t \Rightarrow c_1 = \dots = c_m = 0 \right)$$

$\Leftrightarrow$ $\{y_k\}$ l.u. in $C^1(I,\mathbb{R}^n)$

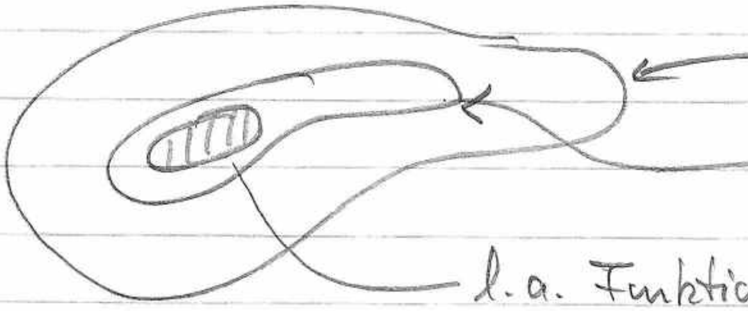
Dieser Begriff der l.a / lu. ist wohl zu unterscheiden von dem entsprechenden als Vektor-Familie in $\mathbb{R}^n$
Dazu folgende Begriffs-Hierarchien:

* $\{y_k\}$ l.a. in $t_0 \in I \Leftrightarrow \{y_k(t_0)\} \subset \mathbb{R}^n$ l.a.
* $\{y_k\}$ l.a $\forall t \in I \Leftrightarrow \forall t: \{y_k(t)\} \subset \mathbb{R}^n$ l.a
* $\{y_k\}$ l.a Funktionsfamilie (w.o.)

A4

4

Es gilt: y_k l.a. Familie $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ y_k l.a. $\forall t \in I$



Die Inklusionen sind klar, Beispiele

(1) $y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $y_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \{y_1, y_2\}$ (vektoriell) l.a. nur für $t = 0$

(2) $y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \{y_1, y_2\}$ l.a. $\forall t \in \mathbb{R}$

aber: y_1, y_2 l.u. im Funktionsraum

denn $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv 0 \quad \forall t \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0$

(3) $y_1 = e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y_2 = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $y_3 = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \{y_1, y_2, y_3\}$ sind $\forall t \in \mathbb{R}$ l.a. Vektoren

aber $\{y_1, y_2, y_3\}$ l.u. in $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$!

<u>Beachte</u>: l.u. Vektoren $\forall t \Leftrightarrow \forall t\ \exists c_1, \dots, c_m$ mit ...
l.u. Funktion $\Leftrightarrow \exists c_1, \dots, c_m$ sodaß $\forall t$ ....

A5

5

<u>Theorem</u> (Linear-Abhängigkeitstheorem)

Im Kern L sind die Eigenschaften

* vektorielle Abhängigkeit für ein $t_0 \in I$
* lineare Abhängigkeit in $C(I, \mathbb{R}^n)$

äquivalent. Das heißt:

Seien $\{y_k \mid k = 1, \dots, m\} \subset \operatorname{Kern} L$.

Dann sind äquivalent:

(1) * Es gibt ein $t_0 \in I$ und $\{y_1(t_0), \dots, y_m(t_0)\}$ ist eine Familie von m l.a. Vektoren in $\mathbb{R}^n$

(2) * $\{y_1(t), \dots, y_m(t)\}$ l.a in $\mathbb{R}^n$ $\forall t \in I$

(3) * $\{y_1, \dots, y_m\}$ l.a. in $C^1(I, \mathbb{R}^n)$

<u>Beweis:</u> Da (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) trivialerweise, zeigen wir (1) $\Rightarrow$ (3).

Es seien also $y_1(t), \dots, y_m(t) \in \operatorname{Kern} L$ und es sei t_0, sodaß es $(c_1, \dots c_m) \neq 0$ gibt

$$\sum_{k=1}^{m} c_k y_k(t_0) = 0.$$

Dann sei $y(t) := \sum_{k=1}^{m} c_k y_k(t)$.

da c_k unabh. von t

$\Rightarrow L(y) = 0$. Ferner: $y(t_0) = 0 \overset{ExE}{\Longrightarrow} y \equiv 0$ qed.

§ 2 Wronski-Matrix und ~ Determinante: Die Liouville-Formel.

<u>Definition</u>: Für n Funktionen $y_k : I \to \mathbb{R}^n$ heißt die $n \times n$-Matrix

$$W(t) = \big(y_1, \dots, y_n\big)(t) \text{ Wronski-Matrix}$$

und sind die Funktionen $y_k \in \operatorname{Kern} L$, so heißt $W \equiv W(y_1, \dots y_k; t)$ <u>Wronski-matrix</u> des Dynamischen Systems L.

<u>Theorem</u>: Wronski-Determinante und Liouville-Formel

Sei W Wronski-Matrix des Systems L,

① Es sind äquivalent:

i) $\det W(t_0) = 0$ für ein $t_0 \in I$

ii) $\det W(t) \equiv 0$ für alle $t \in I$

② $w(t) := \det W(t)$ erfüllt die Dgl

$$\dot{w} = cw \quad \& \text{ es ist } c = \operatorname{Spur} A$$

Folgerung: $\boxed{w(t) = w_0 \cdot e^{t \operatorname{Spur} A}}$ Liouville-Formel für $A(t) = \text{const}$.

Ist $A = A(t)$, so folgt einfach

$$\left\| \, w(t) = w_0 e^{\int \operatorname{spur} A \, d(s)} \right|$$

Beweis: ① folgt sofort nach §1: Theorem.

zu ② $\det W(t)$ ist multilinear bzgl. seiner Spalten, das bedeutet

$$\frac{d}{dt}\det W(t) = \sum_{k=1}^{n} \det(W_k(t))$$

wobei $W_k = \begin{pmatrix} | & & | & | & & | \\ y_1, & \ldots, & \dot{y}_k, & y_{k+1} & \ldots & y_n \\ | & & | & | & & | \end{pmatrix}$

Ist nun $\dot{y}_k = A y_k$, so folgt

$$\frac{d}{dt}\det W(t) = \sum_{k=1}^{n} \det(y_1, \ldots, Ay_k, \ldots y_n)$$

$$= \operatorname{Spur} A \cdot \det(y_1, \ldots, y_n)$$

Spurformel der Linearen Algebra

$$= \operatorname{Spur} A \cdot \det W(t)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \dot{w} = (\operatorname{Spur} A) \cdot w(t)$$

$$\Longrightarrow \quad w(t) = w_0 \cdot e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{spur} A} \quad (w_0 = w(t_0))$$

Bemerkung: Aus der Liouville-Formel folgt wieder das <u>Linear-Unabhängigkeitsprinzip</u> der Wronski-Matrix

$\det W(t) \neq 0$ für ein $t \in I \Longleftrightarrow \det W(t) \neq 0 \ \forall t$

§3 Evolutionsoperator und Matrix-Exponentialfunktion

Sei $A(t)$ stetig auf $\bar{I}$ mit Stammfunktion

$$\mathbb{A}(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)\,ds.$$

Mit der Definition (Matrix-Exponentialfunktion)

$$(*) \quad e^T := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} = Id + T + \frac{1}{2}T^2 + \frac{1}{6}T^3 + \dots$$

für eine $n \times n$ Matrix T folgt eine Reihe wichtiger Regeln für diese Konstruktion:

Thm (Der Formelkatalog der Matrix-Exponentiale)

① Für jedes T $(n\times n)$ konvergiert die Reihe $(*)$ und stellt wieder eine $(n\times n)$ Matrix dar

② Mit der Operator-Norm $\|T\|_\infty := \sup_{\|x\| \leq 1} \{\|T(x)\|\}$ gilt

$$\|e^T\|_\infty \leq e^{\|T\|_\infty}$$

③ Vertauschungsregel: $T^m e^T = e^T T^m \quad \forall m \in \mathbb{N}_0$

④ Funktionalgleichung: $TS = ST \Longleftrightarrow e^{T+S} = e^T e^S$

⑤ Regularität: $\forall T$ ist e^T invertierbar: $(e^T)^{-1} = e^{-T}$

⑥ Ähnlichkeitsthm: $S = M^{-1} T M \Rightarrow e^S = M^{-1} e^T M$

⑦ Differentialgleichung: $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} \quad \forall A \; n\times n$

Beweise (Ü) ⑧ $e^T = \lim_{n\to\infty} \left(Id + \frac{T}{n}\right)^n$ (vgl. Arnold p 111 / 89)

A9

8a

Beweis zur Exponentialfolge (zu 8)

$$\text{(i)}\quad e^{A} = \sum_{0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

$$\text{(ii)}\quad e^{A} = \lim_{m\to\infty} \left(Id + \frac{A}{m}\right)^m$$

Denn: $$e^{A} - \left(Id + \frac{A}{m}\right)^m = e^{A} - \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{A}{m}\right)^k \cdot \binom{m}{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{m^k}\binom{m}{k}\right)}_{a_k} A^k$$

(beachte: $k > m \Rightarrow \binom{m}{k} \equiv 0 \rightsquigarrow$ formale Schreibweise sinnvoll

Nun ist $$a_k = \frac{1}{k!} - \frac{1}{m^k} \cdot \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} \quad (k \leq m)$$

$$= \frac{1}{k!}\Big(1 - \underbrace{\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{m \cdot m \cdots m}}_{<1}\Big) \quad \underline{\underline{\geq 0}}$$

$$\Rightarrow \left\| e^{A} - \left(Id + \frac{A}{m}\right)^m \right\| \leq \sum_{0}^{\infty} a_k \underbrace{\|A\|}_{=:a}{}^k = \underbrace{e^{a} - \left(1 + \frac{a}{m}\right)^m}_{\to 0 \text{ bei } m\to\infty}$$

Alternativ: $$e^{At} \stackrel{!}{=} \lim \left(Id + \frac{tA}{m}\right)^m \equiv X(t)$$

$$\frac{d}{dt} \to \dot{X}(t) = Ae^{At} = \lim \frac{m}{m} A \left(Id + \frac{tA}{m}\right)^{m-1}$$

$$= A \lim_{m\to\infty} \left(Id + \frac{tA}{m}\right)^{m-1} = AX(t)$$

$$\left(Id + \frac{tA}{m}\right)^{m-1} = \left(Id + \frac{tA}{m}\right)^m \circ \left(Id + \frac{tA}{m}\right)^{-1}$$

$m \gg 1 \Rightarrow$ invertierbar

$$\Rightarrow X(t) = e^{At}, \text{ da } X(0) = Id = e^{At}\big|_{t=0}$$

<u>Folgerung:</u> Ist $L = \dot{y} - Ay$ ein dyn. System, so gilt:

① Für alle $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ist ~~$e^{\mathbb{A}}(y_0)$ eine Lösung~~

$$y(t) = e^{A(t-t_0)}(y_0) \quad \text{bzw} = e^{\mathbb{A}}(y_0)$$

genau die Lösung des Systems mit $y(t_0) = y_0$

② Die Matrix $e^{(t-t_0)A}$ bzw. $e^{\mathbb{A}}$ ist ein Fundamentalsystem; die Spalten $y_1, \dots, y_n$ sind genau diejenigen Lösungen mit

$$\dot{y}_k = A y_k \quad \text{und} \quad y_k(t_0) = e_k \quad (k = 1, \dots, n)$$

③ Damit ist $e^{A(t-t_0)}$ eine reguläre Wronski-Matrix und zwar die <u>kanonische Wronski-Matrix</u>

$\leadsto e^{A(t-t_0)}$ ist Evolutionsoperator, denn

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \ni y_0}_{\substack{\text{Anfangswert} \\ \text{zur Zeit } t_0}} \xmapsto{\ \tau\ } e^{(t-t_0)A}(y_0) = \underbrace{y(t)}_{\substack{\text{Lösung der hom.} \\ \text{Dgl zum Anf.Wert } y_0}} \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$$

④ $$\boxed{\det\left(e^{A(t-t_0)}\right) = e^{(t-t_0)\,\mathrm{Spur}\,A}} \quad (\text{für } A = \text{const.})$$

denn: $\det W(t) = \underbrace{w(t_0)}_{\det W(t_0) = \det \mathrm{Id} = 1} \cdot e^{(t-t_0)\,\mathrm{Spur}\,A}$ nach Liouville.

AM

10

(5) Ist $W(t)$ irgendeine reguläre Wronski-Matrix zu L – also ein Fundamentalsystem so gibt es eine invertierbare Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (M const) mit:

$$\boxed{W(t) = e^{(t-t_0)A} M}$$

Beweis: Per def. sind die Spalten $y_1(t), \dots y_n(t)$ von W Lösungen des Systems

$$y_k(t) \text{ ist eind. Lös-g zum Anf. Wert } y_k(t_0)$$

Nach dem Unabhängigkeitsprinzip der Wronski-Matrix ist

$$\{y_1(t_0), \dots, y_n(t_0)\} \subset \mathbb{R}^n \text{ l.u.}$$

da $\det W(t_1) \neq 0$ für jedes $t \in I$.

Sei $M = (y_1(t_0), \dots, y_n(t_0))$

$\Rightarrow M(e_k) = y_k(t_0)$

$\Rightarrow$ (i) $y(t) := e^{(t-t_0)A}(M(e_k)) = e^{(t-t_0)A}(y_k(0))$

ist genau die Lösung mit $y(t_0) = y_k(0)$

ii) $\tilde{y}(t) = W(t)(e_k) = k\text{-te Spalte v. } W = y_k(t)$

ist ebenfalls Lös-g zum Anf. wert $y_k(t_0)$

$\Rightarrow$ beide gleich $\Rightarrow$ W und $e^{tA}M$ stimmen auf $\{e_k\}$ überein. $\Rightarrow =$.

A12

11

(6) In Anlehnung an (5) gilt natürlich auch in symmetrischer Analogie

Ist $W(t)$ irgendeine (reguläre) Wronski-Matrix – die Spalten bilden also eine Basis von Kern L – so läßt sich die kanonische Wronski-Matrix einfach so gewinnen:

$$\boxed{e^{(t-t_0)A} = W(t)\cdot M^{-1}}$$

wobei M = Matrix der Anf. Werte $M = (y_1(t_0), \dots y_n(t_0))$
wobei die y_k die gegebenen Spalten v. W sind.

denn: $W(t)\left(M^{-1}(y_k(t_0))\right) = W(t)(e_k) = y_k(t)$

und $e^{(t-t_0)A}(y_k(t_0))$ ist wiederum genau die Lösung $y(t) \in$ Kern L mit Anf. Wert $y_k(t_0)$

Daher stimmen

$$e^{(t-t_0)A} \quad \text{und} \quad W\circ M^{-1}$$

auf der Basis $\{y_1(t_0), \dots, y_n(t_0)\} \subset \mathbb{R}^n$

überein, sind also identisch $\forall t$

Natürlich geht das auch kurz mit (5) $e^{tA}M = W$

$$\Rightarrow e^{tA} = WM^{-1}.$$

§4 Homogene (autonome) Systeme

Gegeben sei also ein zeitunabhängiges (autonomes) homogenes System

$$\dot{y} = Ay$$

Lösungs-Ziel: Finde irgendein Fundamental-system $W(t)$ (dann hat man mit §3 (5) jedes andere:

$W_1(t)$, $W_2(t)$ Fundamentalsysteme

$\Leftrightarrow \exists\, T\ (n \times n)$, T konstant mit

$$W_1(t) = W_2(t) \circ T \quad \forall t \in I$$

Beweis: $W_1 = e^{tA} M_1^{-1}$, $W_2 = e^{tA} M_2$

$$\Rightarrow W_1 = W_2 M_2^{-1} \cdot M_1^{-1} =: W_2 \circ T$$

Methoden: Neben den Elementar-Methoden für kleine Dimensionen $(n = 2, 3)$ bzw. erkennbar gut behandelbare Sonderfälle gibt es vor allem zwei anverwandte Meth.

- Die direkte Eigenwert-Methode
- Die Berechnung der kanonischen Matrix-Exponentialfunktion e^{tA}

1. Die direkte Eigenwert-Methode

Das charakteristische Polynom $\det(A - \lambda \mathrm{Id})$ hat – im allgemeinen Fall – die Struktur

$$P_A(\lambda) = \prod_{j=1}^{r} (\lambda - \lambda_j)^{n_j} \cdot \prod_{j=1}^{s} \left(\lambda^2 - 2\alpha_j \lambda + (\alpha_j^2 + \beta_j^2) \right)^{m_j}$$

* $\lambda_1, \dots, \lambda_r \equiv$ reelle Nullstellen, Vielfachheit n_j
* $(\alpha_1 \pm i\beta_1), \dots, (\alpha_s \pm i\beta_s) \equiv$ konjugiert-komplex auftretende komplexe Nullstellen, Vielfachh. m_j

wobei in dieser Auflistung die Nullstellen jeweils paarweise verschieden sind (sonst machen Vielfachheiten keinen Sinn.

1. Hauptfall: Alle λ_j reell, Vielfachheiten 1

Dann ist $\dim(A - \lambda_j \mathrm{Id}) = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n$

Es sei x_j EV zu λ_j $(j = 1, \dots n)$ und

$M = \left(\begin{array}{c} | \\ x_1 \\ | \end{array}, \dots, \begin{array}{c} | \\ x_n \\ | \end{array} \right)$ $n \times n$-Matrix der Spalten aus EV

$$\Rightarrow \left\{ A = M \circ \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{J \text{ (Jordanform)}} \circ M^{-1} \right.$$

(weil nämlich beide auf der Basis $\{x_1, \dots x_n\} \subset \mathbb{R}^n$ übereinstimmen)

$\Rightarrow$ Allgemeine Lös-g ist

$$\boxed{\left\{ y(t) \;\middle|\; y(t) = \sum_{j=1}^{n} A_j e^{\lambda_j t} x_j \;\middle|\; A_j \in \mathbb{R} \right\}}$$

bzw.: $W(t) = \left(x_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, x_n e^{\lambda_n t} \right)$ ist Wronski Matrix von L

2. Fall: Alle λ_j sind zwar reell, aber es gibt Vielfachheiten (> 1)

Für einen Eigenwert – oE λ_1 – sei

* algebr. Vielfachheit $n_1 > 1$

$\rightsquigarrow$ * geom. Vielfachheit k_1 $\begin{cases} = n_1 & (a) \\ < n_1 & (b) \end{cases}$

a) Dann gibt es genauso viele l.u. Eigenvektoren zu λ_1 wie deren Vielfachheit: Man führt sie einfach in der obigen Lös-gformel mit auf – dh.

$$\left\{ x_1^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \ldots, x_1^{(n_1)} e^{\lambda_1 t} \right\}$$

sind Spalten der Wronski-Matrix.

b) Sei $1 \leq k_1 < n_1$ und $\ell_1 = n_1 - k_1$.
Dann kommen zu den k_1 zu ermittelnden EV

A16

15

noch e_1 zu gewinnende l. H. "Hauptvektoren" hinzu. – das sind Vektoren aus iterierten

$$(T - \lambda_1 Id)^j \text{ – Sequenzen.}$$

Die praktische Vorgehensweise ist allerdings diese: